

$$0 = \operatorname{tg} 180^\circ = \operatorname{tg} (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma)}.$$

Hegyesszögekről lévén szó, a tangensek mind végesek, a tört értéke tehát csak úgy lehet 0, ha számlálója 0. Vagyis

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

Ugyancsak a hegyesszögek miatt mindhárom tangens pozitív, felírható tehát rájuk a számtani és mértani közép ismert összefüggése

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} \leq \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{3}$$

átszorozva és köbre emelve

$$(2) \quad 27 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \leq (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)^3$$

(1)-et is (2)-t felhasználva kapjuk, hogy

$$27 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \leq (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)^3,$$

egyszerűsítve és négyzetgyököt vonva

$$(3) \quad \sqrt{27} \leq \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

(3)-ból látható, hogy $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$ a $\sqrt{27}$ -nél kisebb értéket nem vehet fel. $\sqrt{27}$ -et csak akkor veheti fel, ha a felhasznált számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségben az egyenlőség jele érvényes. Ez pedig csak úgy lehet, ha $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma$. Ez azt jelenti, hogy

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ.$$

Mivel $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, az egyenlőoldalú háromszög esetében $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = (\sqrt{3})^3 = \sqrt{27}$, tehát a tangensszorzat valóban felveszi a (3)-ból adódó minimumot.