

Vizsgáljuk a szóbanforgó függvényekre a kéttagú szimmetrikus Jensen-féle egyenlőtlenség két oldalán álló kifejezések különbségét:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 1 \right).\end{aligned}$$

A zárójel negatív, ha $\alpha - \beta \neq 4k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$).

Ha

$$\begin{aligned}(2k+1)\pi &\leq \alpha \leq (2k+2)\pi, \\ (2k+1)\pi &\leq \beta \leq (2k+2)\pi,\end{aligned}$$

akkor az első tényező negatív, tehát a szorzat pozitív, ami azt jelenti, hogy teljesül a konvex függvényekre vonatkozó kéttagú szimmetrikus Jensen-féle egyenlőtlenség, tehát a $\sin x$ függvény a $(2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi$ intervallumokban konvex.

Ha viszont α és β a $2k\pi$ és $(2k+1)\pi$ közt van, akkor a szorzat negatív, mert az első tényező pozitív, s így ezekben az intervallumokban a $\sin x$ függvény konkáv.

Hasonlóan

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 1 \right).$$

Ebből hasonlóan következik, hogy a $\cos x$ függvény a $(4k+1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (4k+3)\frac{\pi}{2}$ intervallumokban konvex, a $(4k-1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (4k+1)\frac{\pi}{2}$ intervallumokban pedig konkáv.