

Sokszor látni azt a hibát, hogy ha bizonyos számoknak kiszámította valaki a számtani közepét, azután hozzá kell még egy számot vennie az adottakhoz, akkor ezek számtani közepét úgy akarja kiszámítani, hogy a már ismert számtani középnek és az új számnak veszi a számtani közepét. Ez természetesen helytelen, de ezt a hibát is haszonná fordíthatjuk, ha kijavítjuk. Legyen

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1}, \quad x' = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

és számítsuk ki azt az y -t, amire tényleg igaz az, hogy x' -nek és y -nak a számtani közepe x . Mivel

$$nx' = x_1 + x_2 + \dots + x_n = (n+1)x - x_{n+1},$$

így

$$\begin{aligned} \frac{x' + y}{2} = x - \text{ből} \quad y = 2x - x' &= 2x - \frac{(n+1)x - x_{n+1}}{n} = \\ &= \frac{x_{n+1} + (n-1)x}{n}. \end{aligned}$$

Ezt a kifejezést n tagú számtani középnek tekinthetjük, melyben $n-1$ tag megegyezik x -szel, az n -edik pedig x_{n+1} . Ekkor azonban fel is használhatjuk a Jensen-egyenlőtlenségre vonatkozó állítás egy teljes indukciós bizonyítására.

Tegyük fel, hogy egy $f(x)$ függvényre teljesül az

$$(1) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség egy intervallum bármely két különböző x_1, x_2 abszcisszájára. Be akarjuk bizonyítani, hogy akkor teljesül minden pozitív egész k -val az intervallum bármely k számú abszcisszájára a k -tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség, feltéve, hogy az abszcisszák közt vannak különbözők.

$k = 2$ -re a bizonyítandó állítás azonos a feltétellel, tehát nyilván következik belőle. Tegyük fel, hogy valamilyen $k = n$ értékre (n legalább 2) már igazoltuk, hogy

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n},$$

és be fogjuk bizonyítani, hogy akkor igaznak kell lennie a megfelelő egyenlőtlenségnek $k = n+1$ -re is. Legyen $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ az adott $n+1$ abszcissza. A fenti jelölések és az ott kiszámított y felhasználásával nyerjük (1) szerint, hogy

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n+1}\right) &= f(x) = f\left(\frac{x' + y}{2}\right) = \\ &= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + (n-1)x}{n}\right) \leq \\ &\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) + f\left(\frac{x_{n+1} + (n-1)x}{n}\right)}{2} \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezés mindkét tagjában a változó érték egy-egy n -tagú számtani közép, így alkalmazható rá feltevésünk szerint a Jensen-egyenlőtlenség, és nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} + \frac{f(x_{n+1}) + (n-1)f(x)}{n}}{2} = \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}) + (n-1)f(x)}{2n}. \end{aligned}$$

Mindenütt meg kellett engednünk az egyenlőség jelét is, mert az előbbi lépésben fennállhat ha $x' = y$, az utóbbiban pedig abban az egy esetben, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ és $x_{n+1} = x$. Az összes feltételek azonban csak akkor teljesülnek, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}$, ezt pedig kizártuk. Így az utolsó egyenlőtlenségben már mindig a $<$ jel lesz érvényes.

A pozitív $2n$ -nel átszorozva az egyenlőtlenséget és $(n-1)f(x)$ -et mindkét oldalból levonva nyerjük, hogy

$$(n+1)f(x) < f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}),$$

amiből $(n+1)$ -gyel átosztva adódik a Jensen-egyenlőtlenség $k = n+1$ -re. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Bizonyításunk tulajdonképpen a Cauchy-féle bizonyításnak (lásd 339. feladat III. évf. 4–5. szám, 201. old.) egy módosítása, annak két lépését összevonva. A két n -tagú számtani közép használata annak felel meg, hogy az n -tagú egyenlőtlenségről a $2n$ -tagúra következtetünk, de mindjárt használtuk a másik ötletet is; az $n+1$ abszcisszából $2n$ -et csináltunk úgy, hogy hozzájuk vettük még $n-1$ -szer a számtani közepüket.