

Szorozzuk és osszuk az összegükkel az egyenlőtlenség két oldalán álló kifejezés különbségét

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}{k}} - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} = \\ & = \frac{k(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2) - (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2}{k^2 \left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}{k}} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \right)} \end{aligned}$$

Legyen $x_1, x_2, \dots, x_k$ mind pozitív vagy nulla, akkor elég a számláló előjelét vizsgálnunk.

$$\begin{aligned} & k(x_1^2 + \dots + x_k^2) - (x_1 + \dots + x_k)^2 = kx_1^2 + \dots + kx_k^2 - \\ & - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_1x_3 - \dots - x_k^2 = (k-1)x_1^2 + \dots + \\ & + (k-1)x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - \dots - 2x_{k-1}x_k = (x_1 - x_2)^2 + \\ & + (x_1 - x_3)^2 + \dots + (x_1 - x_k)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + \\ & + (x_{k-1} - x_k)^2 > 0, \end{aligned}$$

ha az x -szek között van különböző.

Ha az x -szek között van negatív, akkor a negatív x -szek helyett (-1) -szeresüket beírva a kifejezés csökken, de még így is pozitív, annál inkább az eredeti kifejezés.

A számtani és harmonikus közepek különbsége:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} - \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k}} = \\ & = \frac{(x_1 + \dots + x_k) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k} \right) - k^2}{k \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k} \right)}. \end{aligned}$$

Itt a nevező pozitív, tehát elég a számláló előjelét vizsgálni.

$$\begin{aligned} & (x_1 + \dots + x_k) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k} \right) - k^2 = \frac{x_1}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \dots + \\ & + \frac{x_k}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_2} + \dots + \frac{x_k}{x_2} + \dots + \frac{x_k}{x_1} + \frac{x_k}{x_2} + \dots + \\ & + \frac{x_k}{x_k} - k^2 = \frac{x_2}{x_1} + \dots + \frac{x_k}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} \dots + \frac{x_k}{x_2} + \dots + \\ & + \frac{x_1}{x_k} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + k - k^2. \end{aligned} \tag{2}$$

A megmaradt $k^2 - k$ számú tört párosítható, minden tört a reciprok értékével. De tudjuk, hogy pozitív számnak és reciprokának összege nem lehet kisebb mint 2. Tehát a $\frac{k^2 - k}{2}$ tagpár összege nem lehet kisebb, mint $2 \frac{k^2 - k}{2} = k^2 - k$, így az (1) kifejezés nem lehet negatív. Nulla is csak úgy lehetne, ha minden x megegyezne, de ezt az esetet kizártuk, tehát (2) pozitív és így az (1) tört is, amivel az állítást bebizonyítottuk.