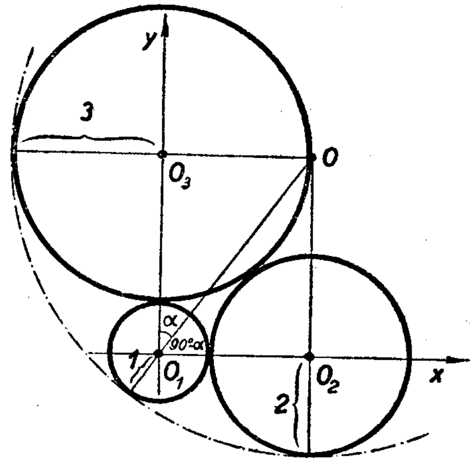
**I. megoldás:** Egy kivételével valamennyi megoldó előzetes számítás és okoskodás nélkül rátalált a helyes megoldásra: a keresett kör sugara 6 egységnyi. Ezt az eredményt azután igazolták, a következő módon: a megadott három kör középpontjai olyan derékszögű háromszöget alkotnak, melynek befogói 3 és 4, átfogója 6 egységnyi.




Ezt a derékszögű háromszöget átfogójának középpontjára tükrözve olyan téglalappá egészítjük ki, melynek új, negyedik csúcsa a keresett kör középpontja. Ha t. i. ezt a pontot összekötjük mind a három kör középpontjával és ezeket az összekötő egyeneseket rendre meghosszabbítjuk a megfelelő körökkel való metszéspontokig, akkor az így kapott mind a három távolság 6 egységnyire van ettől a ponttól.

**II. megoldás:** Ha valaki rálátással nem jön rá a megoldásra, számolással is megtalálja a helyes eredményt. Legyen a keresett kör sugara: $r$, középpontja: $O$, ha ezt összekötjük mind a három kör középpontjával, akkor $OO_1 = r-1$, $OO_2 = r-2$, $OO_3 = r-3$. Ha az $O_1OO_3\triangle$-ben az $O_1$ csúcsnál levő szöget $\alpha$-val jelöljük, akkor az $OO_1O_2\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$.

A cosinus tétel felhasználásával:

$$(r-3)^2 = (r-1)^2 + 4^2 - 8(r-1)\cos\alpha,$$
$$(r-2)^2 = (r-1)^2 + 3^2 - 6(r-1)\sin\alpha,$$

mert $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

Az egyenletek rendezés után

$$r(2\cos\alpha - 1) = 2\cos\alpha + 2,$$
$$r(\sin\alpha - 1) = \sin\alpha + 3.$$

Az első egyenletből:

$$r = \frac{2\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1},$$

és azt a második egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{2\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1}(3\sin\alpha - 1) - (3\sin\alpha + 3) = 0.$$

Rendezve: $9\sin\alpha = 8\cos\alpha - 1$.

Fejezzük ki $\sin\alpha$-t $\cos\alpha$-val: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Emeljük négyzetre az egyenletet:

$$81(1-\cos^2\alpha) = 64\cos^2\alpha - 16\cos\alpha + 1,$$

ahonnan újabb rendezés után

$$145\cos^2\alpha - 16\cos\alpha - 80 = 0,$$

innen $\cos = \frac{4}{5}$, míg a másik gyök, $\cos\alpha = -\frac{20}{29}$ a négyzetreemelés előtti egyenletnek nem gyöke. Tehát

$$r = \frac{\frac{8}{5}+2}{\frac{8}{5}-1} = \frac{18}{3} = 6.$$

**III. Megoldás.** Helyezzük el a koordináta-rendszert úgy, hogy $O_1$ a középpontja, $O_2$ az $x$ tengelyen van, $O_3$ az $Y$ tengelyen. A feladatot megoldó $O$ középpont $O_1$-től $(r-1)$, $O_2$-től $(r-2)$ és $O_3$-tól $(r-3)$ távolságra van, keressük tehát azt az $r$ értéket, amelyre nézve az $O_1$-ből $(r-1)$, $O_2$-ből $(r-2)$ és $O_3$-ból $(r-3)$ sugárral rajzolt körök egy pontban metszik egymást.

A három kör egyenlete:

$$\text{(I)} \qquad \begin{gathered} x^2+y^2=(r-1)^2, \quad (x-3)^2+y^2=(r-2)^2, \\ x^2+(y-4)^2=(r-3)^2. \end{gathered}$$

Az első és második egyenlet különbségéből $x=\dfrac{r+3}{3}$ adódik ez az $y$ tengellyel párhuzamos egyenes. Az első és harmadik egyenletből hasonlóan $y=\dfrac{r+2}{2}$, ez az $x$ tengellyel párhuzamos egyenes.

Ha e két egyenes metszéspontja rajta van az (I) körökön, akkor rajta van pl. az első körön is, tehát:

$$\left(\frac{r+3}{3}\right)^2+\left(\frac{r+2}{2}\right)^2=(r-1)^2$$

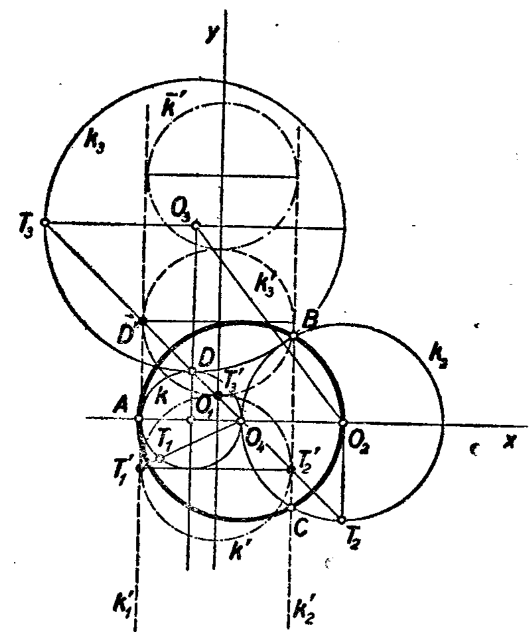
Ennek az egyenletnek a keresett megoldása: $r=6$; míg a másik gyök $r=-\dfrac{2}{13}$. Ha figyelembe vesszük, hogy $r^*$-gal jelölve annak a körnek a sugarát, amelyet a 3 kör kívülről érint, előbbi gondolatmenetünkhöz hasonlóan az

$$\text{(II)} \qquad x^2+y^2=(1+r^*)^2 \quad (x-3)^2+y^2=(2+r^*)^2, \quad x^2+(y-r)^2=(3+r^*)^2$$

köröknek kell egyetlen ponton áthaladni; másrészt a (II) egyenletek az (I)-ből az $r=-r^*$ helyettesítéssel jönnek létre, akkor $-r=r^*=\dfrac{2}{13}$, annak a körnek a sugara, melyet a feladatban adott három kör kívülről érint.

**IV. Megoldás.** A Középiskolai Matematikai Lapok II. évfolyamának 2. számában a Kárteszi Ferenc „A körsorokról" írt tanulmányában foglalkozik a körre való tükrözéssel, amelynek segítségével a mi feladatunkhoz hasonló feladatokat old meg.

Legyen megint $O_1$ a koordináta-rendszer középpontja [1], a három kör rendre $K_1$, $K_2$, $K_3$.




Válasszuk vezérkörnek azt a kört, melynek középpontja a $K_1$ és $K_2$ kör érintési pontja $O_4$ és sugara 2 egységnyi. Ekkor a $K_1$ kör képe az $A$ pontban a $K_1$ körhöz húzott érintő, a $K_2$ kör képe a vezérkör és $K_2$ hatványvonala $K_2'$, amely merőleges az $x$ tengelyre és egyenlete $x=2$, a $K_3$ kör képét megszerkeszthetjük a következő meggondolással: $K_3$ érinti $K_1$-t a $D$ pontban, tehát a képének $K_3'$-nek a $K_1'$-et a $D'$-ben kell érintenie. De ezzel már a helyzete teljesen meg van határozva, mert $K_2'$-t is érintenie kell; $K_3'$ sugara 1 1/2 egységnyi, mert $K_1'$ és $K_2'$ távolsága 3. Annak a körnek, amelyet a $K_1$, $K_2$ és $K_3$ körök belülről érintenek, olyan kör lesz a képe, amely érinti a $K_1'$, $K_2'$ egyeneseket és a $K_3'$ kört. Ilyen kör kettő van. $K'$ és $\overline{K'}$. Ezek közül – egyszerű szemlélet is mutatja, hogy $\overline{K'}$, annak a körnek képe, amelyet a három kör kívülről érint és a keresett $K$ kör képe: $K'$. Az érintési pontok képei: $T_1'$, $T_2'$ és $T_3'$. $T_3'$ koordinátái $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ $T_2'$-éi: $(2, -1)$.

A $T_3'O_4T_2'$ egyenes a $K_2$ kört $T_2$ $(3, -2)$-ben, a $K_3$ kört $T_3(4, -3)$-ban metszi. Ezek a keresett $K$ kör érintési pontjai a $K_2$, illetve $K_3$ körön. Középpontját megkapjuk, ha $T_3O_3$ és $T_2O_2$ metszéspontját keressük: $O$-t. $O$ koordinátái: $(3, 4)$ és ebből már következik, hogy $r=6$.

[1] Az ábrán az $y$ tengely tévesen van jelölve.