

I. megoldás: Ha α akármilyen pozitív szám, akkor $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$. Ugyanis az $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$, ezt pedig szabad α -val osztani, mivel a feltétel szerint $\alpha > 0$. Az osztást végrehajtva kapjuk, hogy $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$. Írjuk az igazolandó egyenlőtlenséget ilyen alakban:

$$\left[\sin 2\alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha} \right] + \frac{1}{\sin 2\alpha} \geq 3.$$

A zárójelben levő rész a fentiek szerint ≥ 2 . A második rész pedig, mivel $\sin 2\alpha \leq 1$

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} \geq 1$$

A két rész összege tehát nem lehet kisebb 3-nál.

Villányi Ottó (Szentendre, IV. o.)

II. megoldás: Redukáljuk az egyenlőtlenséget nullára. Elegendő a keletkező egyenlőtlenséget igazolni. A baloldal

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha} - 3 &= \frac{2 - 3 \sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \\ &= \frac{(1 - \sin 2\alpha)(2 - \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

Ez pedig csak pozitív lehet, mivel pozitív a számlálóban levő szorzat mindkét tényezője, és a nevező is. Ennek folytán a kiindulásra szolgált egyenlőtlenség is helyes.