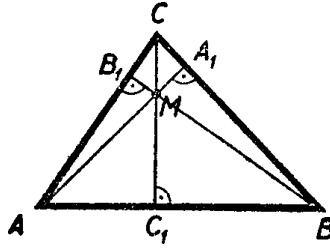


Legyenek a háromszög magasságvonalai AA_1 , BB_1 , CC_1 , magasságpontja M .



$AC_1M \triangle \sim MA_1C \triangle$, mert két-két szögük egyenlő:
 $AC_1M \sphericalangle = MA_1C \sphericalangle = 90^\circ$; $C_1MA \sphericalangle = CM A_1 \sphericalangle$ (csúcsszögek).
 Hasonló háromszögekben az egyenlő szögekkel szemben fekvő oldalak aránya egyenlő:

$$(1) \quad AM : MC_1 = CM : MA_1, \quad \text{ahonnan: } AM \cdot MA_1 = CM \cdot MC_1.$$

Az előbbihez hasonlóan: $AMB_1 \triangle \sim A_1MB \triangle$, ahonnan:

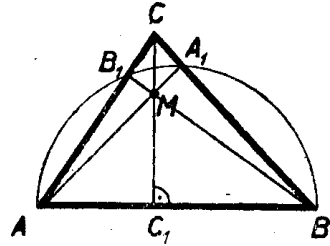
$$(2) \quad AM : MB_1 = BM : MA_1, \quad AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1,$$

(1) és (2) összevetéséből adódik a tétel:

$$AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1 = CM \cdot MC_1.$$

A bizonyítás érvényes bármely hegyes- és tompaszögű háromszögre. Derékszögű háromszögnél M pont, a derékszög csúcsa, két olyan részre osztja a magasságvonalakat, amelyek közül az egyik hossza 0. Ez esetben a kívánt szorzat 0 mindhárom magasságvonalra nézve.

II. megoldás: A háromszög oldalai, mint átmérők fölé félköröket rajzolunk.



$AA_1B \sphericalangle = AB_1B \sphericalangle = 90^\circ$, tehát Thales tétele értelmében az A_1 és B_1 pontok rajta vannak az $\overline{AB}$ oldal fölé rajzolt félkör kerületén. Az AB átmérőjű körben az M ponton átmenő húrok metszeteinek szorzata állandó és megegyezik az M pont körre vonatkozó hatványával. Tehát:

$$(3) \quad AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1.$$

Az előbbihez hasonlóan: B_1 és C_1 pontok rajta vannak a BC oldal fölé rajzolt félkör kerületén; M pontnak a BC átmérőjű körre vonatkozó hatványa:

$$(4) \quad BM \cdot MB_1 = CM \cdot MC_1.$$

(3) és (4) összevetéséből adódik a tétel:

$$AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1 = CM \cdot MC_1$$

Hegyesszögű háromszögben M pont a körökre vonatkozólag belső pont, tompaszögű háromszögben külső pont, derékszögűben kerületi pont. A kör hatványára vonatkozó tétel érvényes mindhárom fajta pontra, tehát a tétel fennáll bármely háromszögre.