

Hozzuk a tagokat közös nevezőre:

$$\frac{1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-3} + \dots + (n-1)2 + n}{2^{n-1}}.$$

Foglalkozzunk egyelőre csak a számlálóval. Az egyes tagokat felbontjuk így: $2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-2} + 2^{n-2}$, $3 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-3} + 2^{n-3} + 2^{n-3}$ stb. és átrendezzük a kifejezést:

$$(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1) + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1) + \\ (2^{n-3} + \dots + 1) + \dots + (2 + 1) + 1.$$

Az egyes mértani sorokat összegezzük, majd a kapott mértani sort ismét összegezzük:

$$\frac{2^n - 1}{2 - 1} + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} + \dots + \frac{2^2 - 1}{2 - 1} + \frac{2 - 1}{2 - 1} = \\ = \frac{2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1 - (n + 1)}{2 - 1} = \\ = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - (n + 1) = 2^{n+1} - (n + 2)$$

Ebből az eredeti kifejezést megkapjuk, ha 2^{n-1} -gyel osztunk:

$$\frac{2^{n+1} - (n + 2)}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n + 2}{2^{n-1}}.$$

A második tag nevezőjében n kitevőben szerepel, a számlálóban pedig csak tagként. n értékével, tehát a nevező sokkal gyorsabban nő, mint a számláló, vagyis a tört értéke csökken. Ha pedig n értéke minden határon túl nő, a tag 0-hoz közeledik. Mivel azonban 2^2 n értékétől független:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} \right) = 4.$$

Durst Endre (Szolnok IV. o.)