

Helyezzünk most több pontban súlyokat a görbére. Kössük össze a pontokat abban a sorrendben, ahogy a görbén következnek és az utolsót kössük össze az elsővel. Így konvex sokszög keletkezik. A fizikából tudjuk, hogy ha ennek csúcsaiba súlyokat teszünk, akkor a súlypont a sokszög belsejében lesz. Miután pedig a görbe, amibe a sokszöget írtuk, konvex (alulról), így ez esetben is a görbe fölött lesz a súlypont. Ezt szigorúan bebizonyíthatjuk már meglevő ismereteinkből.

Az $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ pontokban rendre elhelyezett $p_1, p_2, \dots, p_k$ súlyok súlypontja a

$$\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k}, \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_k y_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} \right)$$

pont. Az állítást teljes indukcióval fogjuk igazolni. $k = 2$ -re már láttuk az állítás helyességét. Tegyük fel, hogy $k = n - 1$ -re már kiszámítottuk a súlypont koordinátáit ($n > 2$). n darab pont súlypontjához úgy jutunk, hogy vesszük $n - 1$ darab pont súlypontját, és ide képzeljük összpontosítva az $n - 1$ darab pontba helyezett súlyokat. Ennek és az n -edik pontnak képezzük a súlypontját. Mivel feltevésünk szerint az $n - 1$ pont súlypontjának pl. az abszcisszája $\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_{n-1} x_{n-1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}}$, a pontban elhelyezendő súly pedig $p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = p$, így az n pont súlypontjának abszcisszája

$$\begin{aligned} & \frac{p \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_{n-1} x_{n-1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}} + p_n x_n}{p + p_n} = \\ & \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_{n-1} x_{n-1} + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + p_n}. \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha $n - 1$ pontra helyes az állítás, akkor helyes n pontra is. Mivel 2-re már láttuk az állítás helyes voltát, ezzel megmutattuk, hogy általánosan érvényes. Az ordinátára szószerint ugyanígy következik az állítás helyessége.

Az eredményben az egyes pontok koordinátáinak teljesen szimmetrikus a szerepe. Így nyilvánvaló, hogy ha más sorrendben vesszük a pontokat, akkor is ugyanehhez a súlyponthoz kell jutnunk. Még akkor is ugyanehhez a súlyponthoz jutunk, ha a súlyokat csoportokba foglaljuk és az egyes csoportok súlypontjaiból számítjuk az egész rendszer súlypontját. Az első m és következő n pont súlypontjának abszcisszája

$$\xi_1 = \frac{p_1 x_1 + \dots + p_m x_m}{p_1 + \dots + p_m} \quad \text{és} \quad \xi_2 = \frac{p_{m+1} x_{m+1} + \dots + p_{m+n} x_{m+n}}{p_{m+1} + \dots + p_{m+n}}.$$

Ide a megfelelő súlyok összegét helyezve kapjuk az egész rendszer súlypontjára, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{(p_1 + \dots + p_m) \xi_1 + (p_{m+1} + \dots + p_{m+n}) \xi_2}{p_1 + \dots + p_m + p_{m+1} + \dots + p_{m+n}} = \\ & = \frac{p_1 x_1 + \dots + p_m x_m + p_{m+1} x_{m+1} + \dots + p_{m+n} x_{m+n}}{p_1 + \dots + p_m + p_{m+1} + \dots + p_{m+n}}, \end{aligned}$$

és ugyanígy számolhatunk az ordinátákra is.

Helyezzünk most az $f(x)$ görbe $x_1, x_2, \dots, x_k$ abszcisszájú pontjaiba rendre $p_1, p_2, \dots, p_k$ súlyokat. Megmutatjuk, hogy a görbe akkor és csakis akkor konvex, ha

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k}\right) < \\ (4) \quad & < \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_k f(x_k)}{p_1 + p_2 + \dots + p_k}. \end{aligned}$$

$k = 2$ -re az (1) egyenlőtlenség tartalmazza az állítást; nagyobb k -kra teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

Tegyük fel, hogy $k = n - 1$ -re már igazoltuk az állítást ($n > 2$): $f(x)$ akkor és csakis akkor konvex, ha bármely $x_1, \dots, x_{n-1}$ -re

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + \dots + p_{n-1} x_{n-1}}{p_1 + \dots + p_{n-1}}\right) < \frac{p_1 f(x_1) + \dots + p_{n-1} f(x_{n-1})}{p_1 + \dots + p_{n-1}}.$$

Ekkor ezen feltevés és (1) szerint, ha a függvény konvex, akkor

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{p_1x_1 + \dots + p_{n-1}x_{n-1} + p_nx_n}{p_1 + \dots + p_{n-1} + p_n}\right) = \\
& = f\left(\frac{(p_1 + \dots + p_{n-1})\frac{p_1x_1 + \dots + p_{n-1}x_{n-1}}{p_1 + \dots + p_{n-1}} + p_nx_n}{(p_1 + \dots + p_{n-1}) + p_n}\right) < \\
& < \frac{(p_1 + \dots + p_{n-1})f\left(\frac{p_1x_1 + \dots + p_{n-1}x_{n-1}}{p_1 + \dots + p_{n-1}}\right) + p_nf(x_n)}{(p_1 + \dots + p_{n-1}) + p_n} < \\
& < \frac{(p_1 + \dots + p_{n-1})\frac{p_1f(x_1) + \dots + p_{n-1}f(x_{n-1})}{p_1 + \dots + p_{n-1}} + p_nf(x_n)}{p_1 + \dots + p_{n-1} + p_n} = \\
& = \frac{p_1f(x_1) + \dots + p_{n-1}f(x_{n-1}) + p_nf(x_n)}{p_1 + \dots + p_{n-1} + p_n}.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy állításunk minden k -ra helyes. Megfordítva ha a (4) egyenlőtlenség fennáll, akkor a függvény konvex, hiszen (1') a (4) egyenlőtlenségnek speciális esete.

Itt is írhatunk $\frac{p_1}{p_1 + \dots + p_k}, \frac{p_2}{p_1 + \dots + p_k}, \dots, \frac{p_k}{p_1 + \dots + p_k}$ helyett $q_1, q_2, \dots, q_k$ -t. A p -kkel együtt ezek is pozitívok és $q_1 + q_2 + \dots + q_k = 1$.

Ekkor a (4) egyenlőtlenség így is írható

$$\begin{aligned}
& f(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_kx_k) < \\
(4') \quad & < q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \dots + q_kf(x_k)
\end{aligned}$$

Ha speciálisan $q_1 = q_2 = \dots = q_k = \frac{1}{k}$, akkor az

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k}.$$

Ha a függvény konvex, akkor ez is mindig teljesül.

A (4) és (4') egyenlőtlenséget *k-tagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenségnek* nevezzük. Az utolsó egyenlőtlenség a *k-tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség*.