

Próbáljuk most ezen eredmény segítségével állapítani meg néhány függvényről, hogy konvex-e, vagy konkáv. Legyen pl. $f(x) = x^2$ és képezzük erre az (1') egyenlőtlenség két oldalának különbségét. Mivel $q_1 + q_2 = 1$

$$(3) \quad \begin{aligned} q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 - (q_1 x_1 + q_2 x_2)^2 &= q_1(1 - q_1)x_1^2 - 2q_1 q_2 x_1 x_2 + \\ &+ q_2(1 - q_2)x_2^2 = q_1 q_2(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = \\ &= q_1 q_2(x_1 - x_2)^2 > 0, \end{aligned}$$

feltéve, hogy $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ és $x_1 \neq x_2$. Az x^2 függvényről tehát ezúton is megmutattuk, hogy konvex.

Vizsgáljuk most a $\sqrt{x}$ függvényt. Alakítsuk át a $q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2} - \sqrt{q_1 x_1 + q_2 x_2}$ kifejezést. Ezzel a gyökjelek miatt ebben az alakban nem tudunk mit kezdeni, de csökkenthetjük a kifejezésben a gyökjelek számát, ha szorzunk és osztunk $q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2} + \sqrt{q_1 x_1 + q_2 x_2}$ -vel. (Részben gyöktelenítjük a kifejezést.) Ekkor a számláló így alakítható át:

$$\begin{aligned} (q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2} - \sqrt{q_1 x_1 + q_2 x_2})(q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2} + \sqrt{q_1 x_1 + q_2 x_2}) &= \\ = (q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2})^2 - (q_1 x_1 + q_2 x_2) &= q_1(q_1 - 1)x_1 + \\ + 2q_1 q_2 \sqrt{x_1 x_2} + q_2(q_2 - 1)x_2 &= -q_1 q_2(x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2) = \\ = -q_1 q_2(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2. \end{aligned}$$

Ez mindig negatív, a nevező viszont mindig pozitív, tehát a kifejezés most mindig negatív lesz. A függvény tehát konkáv.

Vizsgáljuk az x^3 függvényt hasonló módon:

$$\begin{aligned} q_1 x_1^3 + q_2 x_2^3 - (q_1 x_1 + q_2 x_2)^3 &= q_1(1 - q_1)(1 + q_1)x_1^3 - \\ - 3q_1^2 q_2 x_1^2 x_2 - 3q_1 q_2^2 x_1 x_2^2 + q_2(1 - q_2)(1 + q_2)x_2^3 &= \\ = q_1 q_2[(2q_1 + q_2)x_1^3 - 3q_1 x_1^2 x_2 - 3q_2 x_1 x_2^2 + (q_1 + 2q_2)x_2^3] &= \\ = q_1 q_2[q_1(2x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + x_2^3) + q_2(x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + 2x_2^3)]. \end{aligned}$$

Erről már nem látszik olyan könnyen, hogy milyen az előjele. Vizsgáljuk az első zárójelben levő kifejezést és próbáljuk az első tagot egy teljes négyzet kifejezésbe foglalni, mely még x_1 -gyel van szorozva. (Így tudjuk a harmadfokú tagot figyelembe venni.)

$$\begin{aligned} 2x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + x_2^3 &= 2x_1(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) + x_1^2 x_2 - \\ - 2x_1 x_2^2 + x_2^3 &= 2x_1(x_1 - x_2)^2 + x_2(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = \\ &= (2x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Hasonló érvényes a második kifejezésre is, csak ott x_1 -et és x_2 -t fel kell cserélni s így végül a fenti kifejezés így alakítható át:

$$q_1 q_2(x_1 - x_2)^2 [q_1(2x_1 + x_2) + q_2(x_1 + 2x_2)].$$

Mivel q_1 és q_2 pozitív és $x_1 \neq x_2$, ez biztosan pozitív, ha x_1 és x_2 pozitív, viszont biztosan negatív, ha x_1 is, x_2 is negatív. Az eredmény megegyezik azzal, amit az előző közleményben szemlélet alapján állapítottunk meg. A számolás kényelmetlenné válása viszont azt mutatja, hogy találtunk ugyan egy megbízható módszert a domborúság vizsgálására, de ez elég bonyolult módszer. Alkalmazzuk azért még egy egyszerű esetben: az $\frac{1}{x}$ függvényre.

$$\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2} - \frac{1}{q_1 x_1 + q_2 x_2} = \frac{(q_1 x_2 + q_2 x_1)(q_1 x_1 + q_2 x_2) - x_1 x_2}{x_1 x_2 (q_1 x_1 + q_2 x_2)}.$$

Alakítsuk át a számlálót. Itt egy 1-es helyébe lesz célszerű majd $q_1 + q_2$ -t írni:

$$\begin{aligned} q_1 q_2(x_1^2 + x_2^2) + (q_1^2 + q_2^2 - 1)x_1 x_2 &= q_1 q_2(x_1^2 + x_2^2) + \\ + [(q_1^2 - q_1) + (q_2^2 - q_2)] x_1 x_2 &= q_1 q_2(x_1^2 + x_2^2) - \\ - [q_1(1 - q_1) + q_2(1 - q_2)] x_1 x_2 &= q_1 q_2(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = \\ &= q_1 q_2(x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

A számláló tehát ismét pozitív, a nevező biztosan pozitív, ha x_1 és x_2 is pozitív és biztosan negatív, ha x_1 is, x_2 is negatív. A függvény tehát pozitív értékekre konvex, negatív értékekre konkáv.