

Írjuk fel pl. az $\frac{1}{x}$ görbére, hogy minden olyan húr középpontja, melynek végpontjai pozitív abszcisszájúak, a görbe fölött van. Legyen a és b pozitív

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \frac{1}{\frac{a+b}{2}}, \quad \text{azaz} \quad \frac{a+b}{2} \geq \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

A geometriai szemlélet tehát közvetlenül adta, hogy a számtani közép nagyobb a harmonikusnál. Sok egyéb érdekes és fontos egyenlőtlenséget írhatnánk még fel megállapításaink alapján, a baj csak az, hogy nem építünk biztos alapokra, mikor szemléletünkre bízunk annak eldöntését, hogy egy függvény hol konvex, hol konkáv.

Eldönthetjük ezt a szemlélet igénybevétele nélkül is, éppen azt a tulajdonságot fejezve ki az algebra nyelvén, ami a konvex görbéket jellemzi, hogy a húr mindig a görbe fölött van. Legyen x az (x_1, x_2) szakasz egy belső pontja az X -tengelyen. Először is x -et szeretnénk x_1 és x_2 segítségével írni fel.

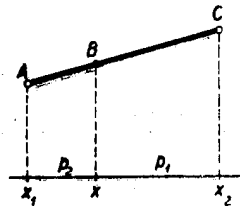
$$x = x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2.$$

$x_2 - x = p_1$, $x - x_1 = p_2$ jelölést használva $x_2 - x_1 = p_1 + p_2$ x a távolságot $p_2 : p_1$ arányban osztó pont. Abszcisszája:

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}.$$

Ha x az (x_1, x_2) szakasz belső pontja (és csakis ekkor) p_1 és p_2 pozitív. Ha $\frac{p_1}{p_1 + p_2}$ és $\frac{p_2}{p_1 + p_2}$ helyett q_1 és q_2 -t írunk, akkor

$$x = q_1 x_1 + q_2 x_2, \quad \text{ahol} \quad q_1, q_2 \quad \text{pozitív és} \quad q_1 + q_2 = 1.$$



Írjuk fel most az x_1 és x_2 abszcisszájú pontok közti húr x abszcisszájú B pontjának ordinátáját. (Feltesszük a továbbiakban mindig, hogy $x_1 \neq x_2$.) Jelöljük ezt y -nal. Az ábráról látható, hogy

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - y} = \frac{AB}{BC} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{q_2}{q_1}.$$

Innen egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$y = \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2} = \frac{q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)}{q_1 + q_2} = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2).$$

A mondott geometriai tulajdonságot tehát így írhatjuk algebrai formában: $f(x)$ akkor és csakis akkor konvex, ha minden x_1, x_2 számhoz és bármely 0-tól különböző pozitív p_1 és p_2 számokra (úgynevezett súlyokra)

$$(1) \quad f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) < \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2}.$$

Írhatjuk az egyenlőtlenséget így is: bármely pozitív q_1 és q_2 súlyokra, melyekre $q_1 + q_2 = 1$.

$$(1') \quad f(q_1 x_1 + q_2 x_2) < q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2).$$

A nyert egyenlőtlenséget nevezik: *súlyozott Jensen-féle egyenlőtlenségnek*. Ez fejezi ki tehát azt, hogy a függvény konvex. Ha $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$, akkor kapjuk a *szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget*.

$$(2) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$