

Előző közleményünkben láttuk, hogy bizonyos egyenlőtlenségek helyessége geometriailag nyilvánvaló abból, hogy valamely függvény görbéje (alulról nézve) konvex, ill. konkáv. Egyszerűbb függvényeknél ezt könnyű a függvény grafikus ábrázolása alapján megállapítani. Nézzük pl. a $\sqrt{x}$ függvényt. Ennek csak pozitív x értékekre van értelme. Görbéje egy vízszintes tengelyű parabola felső fele, tehát (alulról) konkáv görbe. A $-\sqrt{x}$ függvényt viszont ugyanennek a parabolának az alsó fele ábrázolja, tehát konvex görbe.

A $\sqrt[3]{x^2}$ függvény ábrázolásánál a nagyon kis abszolút értékű számoknál kell sűrűn számítani függvényértéket, hogy kellően megbízható görbét rajzolhassunk. Ekkor azt vesszük észre, hogy az $x = 0$ értékhez közeledve a görbe balról is, jobbról is hozzásimul az Y -tengely felső feléhez. Így a negatív x -ekre is konkáv a görbe, pozitív x -ekre is, de nem mondhatjuk azt, hogy az egész görbe konkáv, mert az $x = 0$ helyen csúcsa van.

A $\sqrt{x^3}$ függvénynek ismét csak pozitív x -ekre van értelme és ilyenekre domború görbe ábrázolja, mely az Y -tengely közelében hozzásimul az X -tengelyhez.

Az $\frac{1}{x}$ görbe képe, mint tudjuk, egyenlőszárú hiperbola, melynek két ága nagy abszolút értékű x -ekre az X -tengelyhez simul; 0-hoz közeli negatív x -ekre az Y -tengely alsó, pozitívokra a felső feléhez simul. A negatív x -ekhez tartozó görbeág konkáv, a pozitív x -ekhez tartozó konvex.

Lényegében ugyanez a helyzet az $\frac{1}{x^3}$ függvénnyel is, csak annyi a különbség, hogy annak a görbéje az X -tengelyhez sokkal gyorsabban közeledik, az Y -tengelyhez viszont sokkal lassabban, mint az $\frac{1}{x}$ görbe. Ez azonban nem változtat azon, hogy a görbe domború, ill. homorú.

A 2^x görbéje és 10^x -é is negatív x -ekre az X -tengelyhez simul, 0-nál az értéke 1, pozitív x -ekre pedig egyre rohamosabban növekszik. A két függvénygörbe egészen hasonló menetű; csak a 10^x mindenütt erősebben növekszik, mint a 2^x . Hasonló a görbéje minden 1-nél nagyobb alapszám hatványait ábrázoló görbének is. Minél közelebb van az alapszám 1-hez, annál kevésbé meredeken fog emelkedni a függvény. Az 1 alapszámnak minden hatványa is, 1. Az $y = 1^x = 1$ függvényt tehát egy vízszintes egyenes szemlélteti. Ha viszont az alapszám 1-nél kisebb pozitív szám, akkor a pozitív hatványai közelednek 0-hoz, negatív hatványai pedig minden határon túl nőnek, ha a kitevő abszolút értékét minden határon túl növeljük. A görbék most az 1-nél nagyobb alapokhoz tartozó görbék tükröképei az Y -tengelyre. Az összes ilyen görbék konvexek.

A $\lg x$ görbéje kis pozitív x -eknél nagy abszolút értékű negatív y értékektől meredeken emelkedik, $x = 1$ -nél átmetszi az X tengelyt, azután egyre kevésbé meredeken emelkedik tovább. A görbe mindenütt konkáv.

A $\sin x$ és $\cos x$ függvényt hullámok ábrázolják. A hullámhegyek konkávok, a völgyek konvexek. Így az előbbi a $0 \leq x \leq \pi$, a $2\pi \leq x \leq 3\pi$, általában a $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ intervallumokban konkáv, a $\pi \leq x \leq 2\pi$, $3\pi \leq x \leq 4\pi$, általában a $(2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi$ intervallumokban konvex; utóbbi függvény pedig a $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ és általában a $\frac{4k-1}{2}\pi \leq x \leq \frac{4k+1}{2}\pi$ intervallumokban konkáv, a $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$ és általában a $\frac{4k+1}{2}\pi \leq x \leq \frac{4k+3}{2}\pi$ intervallumokban konvex ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Különleges szerepe van domborúság szempontjából az $ax + b$ alakú függvényeknek, hiszen ezeket egyenes ábrázolja, tehát se nem domborúak, se nem homorúak. Tágabb értelemben viszont konvexnek is, konkávnak is tekinthetjük ezeket. Más függvény nem is bírhat ezzel a tulajdonsággal, csak aminek egyenes a képe.