

**I. megoldás.** A tétel bizonyításához egy segédtételt használunk fel, a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget: ha  $h > -1$  és  $n > 1$ , akkor

$$(1 + h)^n > 1 + nh.$$

Ez sokféleképpen bizonyítható. Mi teljes indukcióval fogjuk igazolni.

$n = 2$ -re a tétel igaz, mert

$$(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h.$$

Tegyük fel, hogy  $n$ -re igaz, bebizonyítjuk, hogy akkor  $(n + 1)$ -re is igaz.

$$\begin{aligned}(1 + h)^{n+1} &= (1 + h)^n(1 + h) > (1 + nh)(1 + h) = \\ &= 1 + (n + 1)h + nh^2 \\ (1 + h)^{n+1} &> 1 + (n + 1)h,\end{aligned}$$

amint állítottuk. E segédtétel birtokában tételünket így bizonyítjuk:

$$\begin{aligned}n^n &> (n + 1)^{n-1} \\ \frac{n^n}{(n + 1)^n} &> \frac{1}{n + 1},\end{aligned}$$

ebből

$$\left(\frac{n}{n + 1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n + 1}\right)^n > \frac{1}{n + 1}.$$

Elég ez utóbbi egyenlőtlenséget igazolni és ez valóban helyes, t. i. a Bernoulli-féle egyenlőtlenség szerint

$$\left(1 - \frac{1}{n + 1}\right)^n > 1 + n\left(-\frac{1}{n + 1}\right) = \frac{1}{n + 1}.$$

*Megoldotta:* Kántor S.

**II. megoldás:** A bebizonyítandó egyenlőtlenséget így alakítjuk át:

$$\frac{n^n}{(n + 1)^{n-1}} = (n + 1)\left(1 - \frac{1}{n + 1}\right)^n > 1.$$

Ezt teljes indukcióval igazoljuk,  $n = 2$ -re a baloldalon  $4/3$  áll.

Ha  $n = k - 1$ -re igazoltuk az állítást:  $k \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} > 1$ , akkor  $n = k$ -t téve

$$(k + 1)\left(1 - \frac{1}{k + 1}\right)^k = k\left(1 - \frac{1}{k + 1}\right)^{k-1} > k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1},$$

ami feltevés szerint nagyobb 1-nél. Ezzel bizonyítottuk állításunkat.

*Megoldotta:* Zobor E.