

I. megoldás. A számláló első tényezőjét osszuk y -nal, a másodikat x -szel, a harmadikat z -vel. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség a következőképpen alakul.

$$\left(1 + \frac{x+z}{y}\right) \left(1 + \frac{y-z}{x}\right) \left(1 + \frac{x-y}{z}\right) \geq 3.$$

A feltételből kifolyólag a következő helyettesítés alkalmazható:

$$x = y(1+u), \quad z = y(1-v), \quad \text{hol } u \geq 0, \text{ és } 1 > v \geq 0.$$

Ebből $\frac{x+z}{y} = 2+u-v$; $y-z = yv$, így $\frac{y-z}{x} = \frac{v}{1+u}$ és $x-y = yu$, egyenletből $\frac{x-y}{z} = \frac{u}{1-v}$.

Így a bizonyítandó egyenlőtlenséget a következő alakra hoztuk:

$$(3+u-v) \left(1 + \frac{v}{1+u}\right) \left(1 + \frac{u}{1-v}\right) \geq 3.$$

Mivel $v < 1$, ha $u \geq 1$,

$$(3+u-v) > 3, \quad 1 + \frac{v}{1+u} \geq 1 \quad \text{és} \quad 1 + \frac{u}{1-v} > 1,$$

az egyenlőtlenség igaz.

Ha

$$u < 1, \quad \text{akkor} \quad (3+u-v) \geq 3-v \quad \text{és} \quad 1 + \frac{u}{1-v} \geq 1.$$

Így

$$\begin{aligned} (3+u-v) \left(1 + \frac{v}{1+u}\right) \cdot \left(1 + \frac{u}{1-v}\right) &\geq \\ &\geq (3-v) \left(1 + \frac{v}{1+u}\right) = 3-v+ \\ &+(3-v) \frac{v}{1+u} \geq 3-v + \frac{2v}{1+u} = 3 + \frac{2v-v(1+u)}{1+u} = \\ &= 3 + v \frac{1-u}{1+u} \geq 3 \text{ mert } u < 1 \text{-ből } \frac{1-u}{1+u} > 0. \end{aligned}$$

Egyenlőség csak akkor áll fent, ha $u = v = 0$.

II. megoldás. A feltételből következik, hogy léteznek olyan nem negatív n és m számok, hogy $x = z + m + n$ és $y = z + n$ legyen.

Szorozzunk át a pozitív xyz -vel, majd alkalmazzuk az előbbi helyettesítést. Az igazolandó egyenlőtlenség ezek után így alakul:

$$(3z+2n+m)(z+2n+m)(z+m) \geq 3z(z+n+m) \cdot (z+n).$$

Egyoldalra hozva:

$$\begin{aligned} (3z+2n+m)(z+2n+m)(z+m) - 3z(z+n+m) \cdot (z+n) &= \\ = (3z+2n+m)(z+n+m) \cdot (z+m) - 3z(z+n+m)(z+n) + \\ &+ n(3z+2n+m)(z+m) \geq (3z+2n)z(z+n+m) - \\ &- 3z(z+n) \cdot (z+n+m) + n(z+n+m)z = \\ &= [3z+2n-3 \cdot (z+n)+n] \cdot (z+n+m)z = \\ &= (3z+2n-3z-3n+n) \cdot (z+n+m)z = 0. \end{aligned}$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $n = m = 0$.