

**I. megoldás.** Mivel  $n$  csak pozitív egész értékeket vehet fel, próbálkozzunk a teljes indukció módszerével.  $n = 1$  esetén a kifejezés értéke éppen 24, tehát a tétel igaz. Tegyük most fel, hogy  $k^4 + 2k^3 + 11k^2 + 10k$  osztható 24-gyel és bizonyítsuk be, hogy ekkor  $(k+1)^4 + 2(k+1)^3 + 11(k+1)^2 + 10(k+1)$  is osztható 24-gyel. Ehhez nyilván elég belátni, hogy az utóbbi két kifejezés különbsége:  $4k^3 + 12k^2 + 32k + 24$  osztható 24-gyel.

$$4k^3 + 12k^2 + 32k + 24 = 4k^3 + 12k^2 + 8k + 24(k+1).$$

Most már csak azt kell igazolni, hogy

$4k^3 + 12k^2 + 8k = 4(k^3 + 3k^2 + 2k)$  mindig osztható 24-gyel, vagyis, hogy  $k^3 + 3k^2 + 2k$  mindig osztható 6-tal. Ez azonban mindig osztható 2-vel, mert az első 2 tag egyező párosságú, a harmadik pedig páros, 3-mal szintén mindig osztható: ha  $k = 3l$  ez triviális, ha  $k = 3l \pm 1$  a 3-mal nem osztható tagok összege  $\pm 1 \pm 2 = \pm 3$ -at ad maradékul.

*Kántor Sándor*

*Megoldotta:* Zobor E.

**II. megoldás.** Az oszthatóság igazolására célszerű a kifejezést szorzattá alakítani.

$$\begin{aligned} n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n &= n^4 + 2n^3 + n^2 + 10n^2 + 10n = \\ &= (n^2 + n)^2 + 10(n^2 + n) = (n^2 + n)(n^2 + n + 10) = \\ &= n(n+1)[n(n+1) + 10]. \end{aligned}$$

$n(n+1)$  és  $n(n+1) + 10$  mindketten párosak, sőt az egyik mindig osztható 4-gyel. Ha ugyanis  $n(n+1)$  nem osztható 4-gyel, vagyis  $n(n+1) = 4k+2$ , akkor  $n(n+1) + 10 = 4k+12$  osztható 4-gyel. A szorzat tehát mindig osztható 8-cal.

Most már csak azt kell belátnunk, hogy 3-mal is osztható.

Ha  $n(n+1)$  osztható 3-mal, akkor tételünk igaz. Ha  $n(n+1)$  nem osztható 3-mal, vagyis  $n = 3k+1$  és így  $n(n+1) = 3l+2$ , akkor  $n(n+1) + 10 = 3l+12$  osztható 3-mal.

*Kovács László*

*Megoldotta:* Rédly E.