

Legyen $p_1 > p_2$. Rajzoljuk meg a kör ugyanazon pontjából kiindulva a p_1 és p_2 oldalú szabályos sokszögeket. A p_1 oldalú sokszög megszerkesztésével tulajdonképpen a teljes szöget osztottuk fel p_1 részre és megszerkesztettük a

$$\frac{360^\circ}{p_1}, \frac{2 \cdot 360^\circ}{p_1}, \frac{3 \cdot 360^\circ}{p_1}, \dots$$

szögeket, ugyanígy a p_2 oldalú sokszög szerkesztése a

$$\frac{360^\circ}{p_2}, \frac{2 \cdot 360^\circ}{p_2}, \frac{3 \cdot 360^\circ}{p_2}, \dots$$

szögeket szolgáltatja, míg a $p_1 \cdot p_2$ oldalú szabályos sokszög szerkesztése a $\frac{360^\circ}{p_1 p_2}$ szög szerkesztésével egyértelmű feladat.

A kérdés ezután így fogalmazható: kijelölhető-e a p_1 oldalú sokszög valamelyik, pl. a -ik szögpontja és a p_2 oldalú sokszög egyik, pl. b -ik szögpontja úgy, hogy e pontokat a kör középpontjával összekötve $\frac{360^\circ}{p_1 p_2}$ szög keletkezzék, azaz van-e olyan a és b egész érték, mely eleget tesz az

$$a \frac{360^\circ}{p_1} - b \frac{360^\circ}{p_2} = \frac{360^\circ}{p_1 p_2},$$

illetőleg

$$(1) \quad p_2 a - p_1 b = 1$$

diophantosi egyenletnek?

Ha p_1 és p_2 nem relatív prímek, hanem r a közös osztójuk, tehát

$$p_1 = r q_1 \quad \text{és} \quad p_2 = r q_2$$

ahol a q_1 és q_2 hányadosok egészszámok, akkor az (1) egyenlet így írható

$$r(a q_1 - b q_2) = 1,$$

ez pedig ellentmondást fejez ki: az egység nem bontható fel két egytől különböző egész tényezőre. Eszerint a feladat megoldásának szükséges feltétele, hogy p_1 és p_2 relatív prímek legyenek.

Vizsgáljuk ezután az (1) egyenletet azzal a feltétellel, hogy p_1 és p_2 relatív prímek. Fejezzük ki belőle a -t:

$$(2) \quad a = \frac{1 + b p_1}{p_2},$$

és tegyük fel kérdésünket a következő formában: b -nek rendre más és más egész értékeket adva, elő fog-e fordulni, hogy valamelyik esetben a -ra is egész számot kapunk? Lapunk II. évfolyamának 5. számában a 244. oldal 3. és 4. bekezdésében¹ bebizonyítottuk, hogy b -nek 1-től $p_2 - 1$ -ig különböző egész értékeket adva, a $\frac{b p_1}{p_2}$ osztásnál 1-től $p_2 - 1$ -ig minden maradék előfordul. b azon értékénél, amikor a maradék $(p_2 - 1)$, tehát $b p_1 = p_2 q + (p_2 - 1)$ (ahol q hányados egész szám), a (2) egyenlet szerint

$$a = \frac{1 + p_2 q + (p_2 - 1)}{p_2} = q + 1.$$

a is egész szám lesz és az a és b számok meghatározásával feladatunkat meg is oldottuk.

Ha tehát $(p_1, p_2) = 1$, a feladat mindig megoldható és a mondottak szerint a tényleges megoldáshoz legfeljebb $(p_2 - 1)$ számú osztást kell elvégeznünk, ill. a kérdéses osztások maradékát megállapítanunk.

Kántor Sándor

Megoldotta: Dávid P.

¹ Fried E.: A prímszámok számáról.