

Legyen a $(-2,0)$ pont F_1 , az $(1,0)$ pont F_2 , a görbe tetszőleges pontja $P(x, y)$ továbbá $PF_1 = r_1$, $PF_2 = r_2$.

A PF_1F_2 háromszögben: $PF_1 + PF_2 \geq F_1F_2 = 3$, vagyis $r_1 + r_2 \geq 3$, tehát $r_1 + 2r_2 \geq 3 + r_2$;

továbbá:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &< 3, & \text{tehát} & \quad r_1 - 2r_2 < 3 - r_2, \\ r_2 - r_1 &< 3, & \text{tehát} & \quad 2r_2 - r_1 < 3 + r_2. \end{aligned}$$

Mindezekből következik, hogy $r_1 + 2r_2 - a = 0$, csak akkor lehet, ha $a > 3 + r_2$, $r_1 - 2r_2 - a = 0$, vagy $2r_2 - r_1 - a = 0$, csak akkor lehet, ha $a < 3 + r_2$. Az $(r_1 + 2r_2 - a)(r_1 - 2r_2 - a)(2r_2 - r_1 - a)$ szorzatban vagy az első, vagy a másik két tényező közül valamelyik lehet 0. Ha P pont rajta van a keresett görbén, és $a > 3 + r_2$, akkor fennáll, hogy $r_1 + 2r_2 = a$, vagyis $r_1 + 2r_2 - a = 0$. Megfordítva: ha a szorzat 0, és $a > 3 + r_2$ akkor csakis $r_1 + 2r_2 - a = 0$, vagyis P pont rajta van a keresett görbén.

Az $(r_1 + 2r_2 - a)(r_1 - 2r_2 - a)(2r_2 - r_1 - a) = 0$ egyenlet tehát a keresett görbe egyenlete, ha $a > 3 + r_2$. Az egyenlet szimmetrikusabbá tehető, ha megszorozzuk $(r_1 + 2r_2 + a)$ -val, amely nem lehet 0:

$$(r_1 + 2r_2 - a)(r_1 + 2r_2 + a)(r_1 - 2r_2 - a)(2r_2 - r_1 - a) = 0.$$

Alkalmazva a két tag összegének és különbségének szorzatára vonatkozó azonosságot:

$$\begin{aligned} & \left[(r_1 + 2r_2)^2 - a^2 \right] \left[a^2 - (r_1 - 2r_2)^2 \right] = 0, \\ & (r_1^2 + 4r_1r_2 + 4r_2^2 - a^2) (a^2 - r_1^2 + 4r_1r_2 - 4r_2^2) = 0, \\ & 16r_1^2r_2^2 - (r_1^2 + 4r_2^2 - a^2)^2 = 0, \\ & 16r_1^2r_2^2 - (r_1^4 + 8r_1^2r_2^2 + 16r_2^4 - 2r_1^2a^2 - 8r_2^2a^2 + a^4) = 0, \\ & -r_1^4 + 8r_1^2r_2^2 - 16r_2^4 + 2a^2(r_1^2 + 4r_2^2) - a^4 = 0, \\ & -(r_1^2 - 4r_2^2)^2 + 2a^2(r_1^2 + 4r_2^2) - a^4 = 0, \\ & r_1^2 = PF_1^2 = (x+2)^2 + y^2 \quad \text{és} \quad r_2^2 = PF_2^2 = (x-1)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} r_1^2 - 4r_2^2 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4x^2 + 8x - 4 - 4y^2 = \\ &= -3(x^2 + y^2 - 4x), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} r_1^2 + 4r_2^2 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 = \\ &= 5x^2 + 5y^2 - 4x + 8. \end{aligned}$$

Ezt a helyettesítést elvégezve:

$$\begin{aligned} & -9(x^2 + y^2 - 4x)^2 + 2a^2(5x^2 + 5y^2 - 4x + 8) - a^4 = 0, \\ & 9 \left[(x^2 + y^2)^2 - 8x(x^2 + y^2) + 16x^2 \right] - 2a^2(5x^2 + 5y^2 - 4x + 8) + a^4 = 0, \\ & 9(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(72x + 10a^2) + 144x^2 + 8a^2x - 16a^2 + a^4 = 0, \\ & 9(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(72x + 10a^2) + (4x + a^2)^2 + 16(8x^2 - a^2) = 0. \end{aligned}$$