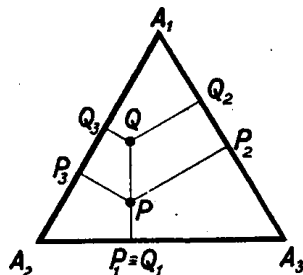


I. megoldás: Mozdítsuk el P -t pl. az A_2A_3 oldalra merőleges irányban egy Q pontba. Legyenek ennek vetületei az oldalakra Q_1, Q_2, Q_3 . $Q_1 = P_1$ tehát A_3P_1 változatlan marad.

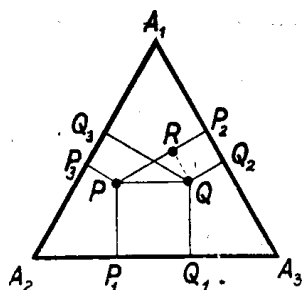


P_2Q_2 és P_3Q_3 közül egyik növeli, másik csökkenti az összeget. De ez a két szakasz egyenlő, mert a PQ szakasz vetületei az A_3A_1 és A_1A_2 oldalakra, a PQ egyenes iránya pedig mindkét oldallal 30° -os szöget zár be.

Egy ilyen eltolásnál tehát nem változik a vizsgált távolságösszeg. Egy pontból a másikba azonban mindig el tudunk jutni, csak a háromszög oldalaira merőleges irányokba haladva, így bármely pontban ugyanakkora a vetületösszeg. A pontot az egyik csúcsba vive át látjuk, hogy értéke mindig a fél terület.

Megoldotta: Villányi O. és ifj. Csonka P.

II. megoldás: Mozdítsuk el pl. az A_2A_3 oldallal párhuzamosan a P pontot egy Q helyzetbe. Q vetületei az oldalakra Q_1, Q_2, Q_3 .

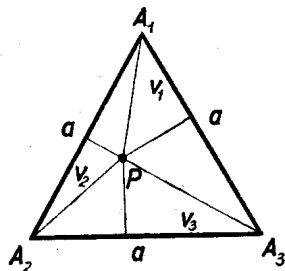


P_2Q_2 és P_3Q_3 mindkettő növeli, vagy mindkettő csökkenti az összeget, P_1Q_1 azonban épp ellenkező értelemben változtatja. $P_1Q_1 = PQ$, továbbá $P_3Q_3 = P_2Q_2$, mert PQ iránya az A_3A_1 és A_1A_2 oldalakéval egyformán 60° -os szöget zár be. Legyen Q vetülete PP_2 -n (vagy meghosszabbításán) R , ekkor a PQR derékszögű háromszögben QR -rel szemben 30° -os szög fekszik s így $QR(=QP_2) = \frac{1}{2}PQ$. Így $P_2Q_2 + P_3Q_3 = PQ$, tehát az összeget ugyanannyival növeltük, mint csökkentettük.

Mivel minden pontból bármelyikbe el lehet jutni az oldalakkal párhuzamos utakon is, tehát tételünk igaznak bizonyult.

Megoldotta: Villányi O.

III. megoldás: A rövidebb írás kedvéért jelöljük a háromszög oldalát a -val, a PP_1, PP_2, PP_3 ; A_1P_2, A_2P_3, A_3P_1 távolságokat rendre $p_1, p_2, p_3, v_1, v_2, v_3$ -mal.



Fejezzük ki Pythagoras tételével kétféleképpen a PA_1, PA_2, PA_3 távolságokat:

$$PA_3^2 = v_3^2 + p_1^2 = (a - v_1)^2 + p_2^2;$$

$$PA_1^2 = v_1^2 + p_2^2 = (a - v_2)^2 + p_3^2;$$

$$PA_2^2 = v_2^2 + p_3^2 = (a - v_3)^2 + p_1^2.$$

Innen

$$v_3^2 - v_1^2 + p_1^2 - p_2^2 = a^2 - 2av_1;$$

$$v_1^2 - v_2^2 + p_2^2 - p_3^2 = a^2 - 2av_2;$$

$$v_2^2 - v_3^2 + p_3^2 - p_1^2 = a^2 - 2av_3.$$

A három egyenletet összeadva: $3a^2 - 2a(v_1 + v_2 + v_3) = 0$, vagyis $v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2}a$.

Megjegyzés. Ha hasonló számolást tetszőleges háromszögre végzünk, az A_3A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 oldalakat rendre a , b , c -vel jelölve, egyébként a fenti jelöléseket megtartva, akkor az

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

összefüggéshez jutunk. Ha P pl. az A_2 csúcsba esik, akkor P_1 és P_3 , is összeesik A_3 -mal, tehát $v_1 = a$, $v_2 = c \cos \alpha$, ahol α a b és c oldal közti szög, és $v_3 = 0$. Így összefüggésünk a cosinustételt adja.

Két további különböző megoldást küldött be: Villányi O.