

Legyen egyelőre P a sík tetszőszerinti pontja, a kör O középpontjától mért távolsága a , a kör sugara r , a sokszög szomszédos csúcsai $A_1, A_2, \dots, A_n$ és legyen $\angle POA_1 = \alpha$.

Ekkor PO az $OA_2, OA_3, \dots, OA_n$ sugarakkal rendre $\alpha + \frac{2\pi}{n}, \alpha + 2\frac{2\pi}{n}, \dots, \alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n}$ nagyságú szöveget zár be – így a cosinus-tételt felhasználva

$$\begin{aligned} PA_1^2 &= a^2 + r^2 - 2ar \cos \alpha, \\ PA_2^2 &= a^2 + r^2 - 2ar \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right), \\ PA_3^2 &= a^2 + r^2 - 2ar \cos \left(\alpha + 2\frac{2\pi}{n} \right), \\ PA_n^2 &= a^2 + r^2 - 2ar \cos \left(\alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n} \right), \end{aligned}$$

A 191. feladatban megmutattuk¹, hogy

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(2\varphi + \alpha) + \dots + \cos((n-1)\varphi + \alpha) = \\ = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \left[(n-1)\frac{\varphi}{2} + \alpha \right]}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + \dots + PA_n^2 &= \\ &= n(a^2 + r^2) - 2ar \left[\cos \alpha + \cos \left(\frac{2\pi}{n} + \alpha \right) + \dots + \cos \left((n-1)\frac{2\pi}{n} + \alpha \right) \right] = \\ &= n(a^2 + r^2) - 2ar \sin n\frac{2\pi}{2n} \cdot \frac{\cos \left[(n-1)\frac{2\pi}{2n} + \alpha \right]}{\sin \frac{2\pi}{2n}} = n(a^2 + r^2). \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy ez az összeg csak a P pontnak a kör középpontjától vett távolságától függ. Ha P -t mozgatjuk a sokszög köré írt körön vagy bármely ezzel koncentrikus körön, akkor az összeg értéke nem változik.

¹II. évf. 4. szám. 214–217 old.