

I. megoldás:

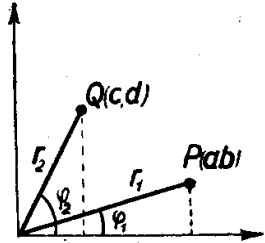
$$\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd}.$$

(Egy tagot pozitív és negatív jellel beiktatva két teljes négyzetet alakítottunk.)

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2} \geq \sqrt{(ac + bd)^2} = ac + bd.$$

Ezzel a kívánt egyenlőtlenséget bizonyítottuk. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $ad = bc$, azaz $a/c = b/d$, vagyis ha az a , b és c , d számpárok arányosak.

II. megoldás: Tekintsük egy derékszögű koordinátarendszerben azon P és Q pontokat, amelyeknek koordinátái (a, b) illetve (c, d) számpárok.



P pontnak az origótól való távolsága r_1 , Q ponté r_2 ; e távolságok a vízszintes tengellyel φ_1 és φ_2 nagyságú szöveget zárnak be.

A rajzból látható:

$$a = r_1 \cos \varphi_1; \quad b = r_1 \sin \varphi_1; \quad c = r_2 \cos \varphi_2; \quad d = r_2 \sin \varphi_2;$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = r_1 \quad \text{és} \quad \sqrt{c^2 + d^2} = r_2.$$

Az igazolandó egyenlőtlenség

$$r_1 r_2 \geq r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + r_1 r_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

alakba megy át. A jobboldal azonban átalakítható,

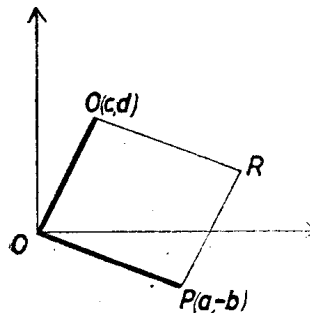
$$r_1 r_2 \geq r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

vagyis

$$1 \geq \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Ez azonban mindig fennáll. Tehát a következtetést visszafelé olvasva, a kiinduló egyenlőtlenség is igaz. Egyenlőség akkor következik be, ha $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$.

III. megoldás: Rajzoljuk fel egy derékszögű koordinátarendszerben a $P(a, -b)$ és $Q(c, d)$ koordinátájú pontokat.



Az $OPRQ$ paralelogramma területét, (mint az $OPQ\Delta$ -ének a kétszeresét) a koordinátageometriában tanultak szerint az $ad + bc$ kifejezés adja.

A paralelogramma oldalai $\sqrt{a^2 + b^2}$, illetve $\sqrt{c^2 + d^2}$ hosszúak.

A paralelogramma területe azonban kisebb, vagy egyenlő, mint a két szomszédos oldalának szorzata, azaz

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \geq ad + bc.$$

Egyenlőség akkor következik be, ha az OP egyenes merőleges az OQ egyenesre.

Megjegyzés: A geometriai bizonyításokban a négyzetgyökjelet pozitív előjellel vettük tekintetbe. Természetesen akkor is igaz az állítás, ha mindkét gyököt negatív előjellel vesszük. Nem egyező előjel esetén nem igaz az állítás.