

I. megoldás: Írjuk az összeget a következő alakba:

$$\begin{aligned} S_n = & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + \dots + 1(n-1) + 1n + \\ & + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2(n-1) + 2n + \\ & + 3 \cdot 4 + \dots + 3(n-1) + 3n + \\ & + (n-1)n. \end{aligned}$$

A tagokat oszloponként összegezzük

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= 1 \cdot 2 &= 2 \\ s_3 &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 &= (1+2)3 = 9 \\ s_4 &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = (1+2+3)4 = 24 \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= (1+2+3+\dots+n-1)n. \end{aligned}$$

Azaz

$$S_n = 0 + 1 \cdot 2 + (1+2)3 + \dots + \frac{(n-1)n^2}{2}.$$

Mint hogy az n -edik tag harmadfokú polinom kifejezés n -re nézve, ez harmadrendű számtani sorozat. (Ez a sorozat harmadik differenciasorának képzésével is könnyen igazolható.)

Feladatunk tehát a (10) formula alapján megoldható, ha meghatározzuk $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 \binom{n-1}{1} + \alpha_3 \binom{n-1}{2} + \alpha_4 \binom{n-1}{3}$ előállításában az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ konstansokat. Sorra $n = 1, 2, 3, 4$ -et téve adódik $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5, \alpha_4 = 3$, tehát

$$S_n = 2 \binom{n}{2} + 5 \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4}.$$

II. megoldás: Az előbbi módon átrendezett sorozatot egészítsük ki a következőképpen:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + \dots + 1(n-1) + 1n + \\ & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2(n-1) + 2n + \\ & \dots \\ & n \cdot 1 + n \cdot 2 + n \cdot 3 + n \cdot 4 + \dots + n(n-1) + n \cdot n. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy az egyik átlóban az első n négyzetszám helyezkedik el, ettől jobbra az eredeti sorozat elemei, balra ugyanezek az elemek helyezkednek el. Minthogy az egész kifejezés összege $\binom{n+1}{2}^2$, ha a négyzetszámok összegét ebből levonjuk, a keresett összeg kétszeresét nyerjük. A négyzetszámok összege $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ tehát

$$2S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$n(n+1)$ -et kiemelve

$$\begin{aligned} S_n &= n(n+1) \left[\frac{n(n+1)}{8} - \frac{2n+1}{12} \right] = n(n+1) \left[\frac{3n(n+1) - 4n - 2}{24} \right] = \\ &= n(n+1) \left[\frac{3n^2 + 3n - 4n - 2}{24} \right] = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}. \end{aligned}$$

III. megoldás: Jelöljük az első n szám négyzetének összegét S_n^2 , köbének összegét S_n^3 -el.

Tekintsük most ismét a sorozatnak a legelső megoldásban felhasznált átalakított formáját. Ebben a $(k-1)$ -edik oszlopban álló tagok összege $k \binom{k}{2} = \frac{1}{2}(k^3 - k^2)$, ezt kell összegezni $k = 2, 3, \dots, n$ -re, azaz – mivel $k = 1$ -re 0-t ad – összegezhethetjük 1-től n -ig. Így kapjuk, hogy $S_n = \frac{1}{2}(S_n^3 - S_n^2)$.

Egészítsük ki most a sorozatot ugyanúgy, mint az előző megoldásnál.

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n \\ & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n \\ & \vdots \\ & n \cdot 1 + n \cdot 2 + n \cdot 3 + \dots + n \cdot n \end{aligned}$$

Most nézzük meg, mi az a többlet, ami a k -adik sorhoz hozzájárult. Eredetileg volt:

$$k(k+1) + k(k+2) + \dots + kn$$

az új sor

$$k \cdot 1 + k \cdot 2 + \dots k \cdot k + k \cdot (k+1) + \dots + k \cdot n$$

a többlet

$$k(1+2+\dots+k) = k \binom{k+1}{2} = \frac{k^3+k^2}{2}.$$

Ezt összegezve $k=1, \dots, n$ -re kapjuk $\frac{1}{2}(S_n^3 + S_n^2)$ -et. Ezt kell levonnunk az egész összegből, hogy S_n -et megkapjuk.

$$S_n = \binom{n+1}{2}^2 - \frac{1}{2}(S_n^3 + S_n^2),$$

de mint már az előbb beláttuk,

$$S_n = \frac{1}{2}(S_n^3 - S_n^2).$$

A két egyenletet összeadva és 2-vel osztva kapjuk:

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\binom{n+1}{2}^2 - S_n^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\binom{n+1}{2}^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right],$$

amit az előbbi módon szorzatalakra hozhatunk.

Ennek a megoldásnak, bár hosszadalmasabb, mint az előbbi, érdekessége, hogy megadja az első n szám köbének összegét. Ha a fenti két egyenletet nem összeadjuk, hanem egyikből a másikat kivonjuk, kapjuk:

$$S_n^3 = \binom{n+1}{2}^2.$$

Ugyanezt megkaphatnánk úgy is, ha az első egyenletet az I. megoldás kiinduló egyenletével hasonlítanánk össze.