

I. megoldás: Bármely az adott tulajdonsággal bíró P ponton átmenő két húr, az egyik pl. a k_1 kör A_1B_1 húrja, a másik a k_2 kör A_2B_2 húrja, – olyan, hogy

$$(1) \quad PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2.$$

Azt kell vizsgálnunk tehát, hogy ez az egyenlőség mely pontokra igaz. Mivel a k_1 és k_2 körnek a P pontra illeszkedő bármely két húrját tekinthetjük, célszerű lesz azt a közös húrt venni, amely a körök egyik metszéspontján, a B ponton megy át. Írjuk át az (1) feltételt erre a húrra:

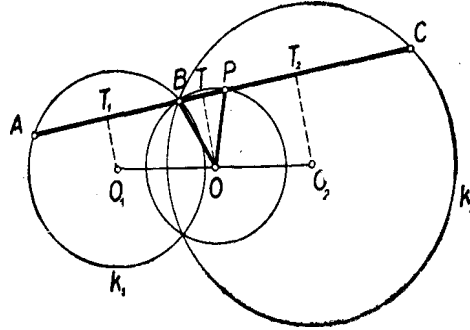
$$PA \cdot PB = PB \cdot PC$$

és PB -vel osszunk, ekkor a

$$(2) \quad PA = PC$$

egyszerű feltételt kapjuk. Eszerint azt kell megvizsgálnunk, mi a mértani helye a két kör közös pontján átmenő AC húrok felezéspontjainak. Bebizonyítjuk, hogy ez az a kör, melynek középpontja a két kör O_1O_2 centrálisának O felezéspontja és átmege az adott körök közös pontjain.

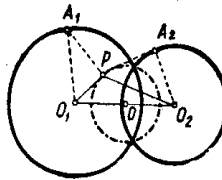
Az AC szakasz két húr összege, AB darabja a k_1 kör húrja, jelöljük ennek felét h_1 -gyel, BC pedig a k_2 kör húrja, ennek felét h_2 -vel jelöljük. Bocsássunk az O_1 , O_2 és O pontokból AC -re merőleges egyeneseket, ezek talppontjait jelöljük rendre T_1 , T_2 és T -vel, utóbbi felezi a T_1T_2 szakaszt.



Másrészt $T_1B = h_1$, a rajz szerint ezenkívül (2) szerint $PC = AC/2 = h_1 + h_2$ és így $PT_2 = h_1$ is fennáll. Eszerint $T_1B = T_2P$, tehát a T -vel felezett T_1T_2 szakasz másik két darabja is egyenlő: $BT = PT$, a BTO és PTO derékszögű háromszögek egybevágók s így $OB = OP$, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Ez a megoldás lényegesen kihasználta, hogy a két kör metszi egymást. A kívánt tulajdonságú pontok azonban léteznek és ugyancsak kört alkotnak, bizonyos feltételek esetén akkor is, amikor a körök nem metszik egymást.

II. megoldás. Legyen a két kör k_1 és k_2 középpontjuk O_1 és O_2 , sugaruk r_1 és r_2 ; egy kívánt tulajdonságú pont P , mely legyen a k_1 kör belsejében és k_2 -n kívül.



A k_1 -re vonatkozó hatvány értékét az O_1P -re merőleges sugár felének a négyzete adja, a k_2 -re vonatkozót pedig a P -ből húzott érintő négyzete. E fél húrnak és érintőnek kell tehát egyenlő hosszúnak lennie. A húr egyik végpontját A_1 -gyel, az egyik érintő érintési pontját pedig A_2 -vel jelölve Pythagoras tétele szerint

$$r_1^2 = O_1P^2 + PA_1^2, \quad \text{és} \quad r_2^2 = O_2P^2 - PA_2^2.$$

A kettő összegéből $PA_1 = PA_2$ folytán

$$r_1^2 + r_2^2 = O_1P^2 + O_2P^2.$$

A baloldal értéke független P -től, tehát a jobboldalé is. Az O_1O_2P háromszögben tehát két oldal négyzetösszege és a harmadik oldal állandó, független a P pont helyzetétől. Ezekből az adatokból kiszámítható azonban a P -ből húzható súlyvonal hossza is. Ha az O_1O_2 oldal felezőpontját O -val jelöljük,¹

$$OP^2 = \frac{1}{2}(O_1P^2 + O_2P^2) - O_1O^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - O_1O^2.$$

¹ A P -ből O_1O_2 -re bocsátott merőleges hosszát a -val, talppontjának távolságát O -tól b -vel jelölve, ha a talppont O -tól O_1 felé esik, $OP^2 = a^2 + b^2$, $O_1P^2 = a^2 + (O_1O - b)^2$, $O_2P^2 = a^2 + (O_2O + b)^2 = a^2 + (O_1O + b)^2$, s így $O_1P^2 + O_2P^2 = 2(O_1O^2 + a^2 + b^2) = 2O_1O^2 + 2OP^2$, amiből következik a fenti egyenlőség.

Ilyen P pontok tehát akkor léteznek, ha

$$O_1O_2 = 2O_1O \leq 2\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} = \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)},$$

és ebben az esetben egy O középpontú körön fekszenek.

Mivel

$$\begin{aligned}\sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)} &= \sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) + (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2)} = \\ &= \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} > r_1 + r_2, \quad \text{ha } r_1 \neq r_2;\end{aligned}$$

tehát ilyen pontok nem metsző körök esetén is lehetnek, ha azok elég közel vannak egymáshoz.