

I. Megoldás: Elég a kifejezést pozitív értékekre vizsgálni, mert ha $x < 0$, akkor $k\sqrt{x^2 + a^2} - x > k\sqrt{a^2 + x^2} - |x| = k\sqrt{a^2 + |x|^2} - |x|$, ez pedig a kifejezés értéke az $|x|$ helyen. Legyen tehát $x > 0$ és jelöljük l -l a $k\sqrt{a^2 + x^2} - x$ kifejezés legkisebb értékét, ami biztosan pozitív. Ekkor

$$k\sqrt{a^2 + x^2} \geq x + l > 0$$

s így

$$\begin{aligned} k^2 a^2 + k^2 x^2 &\geq x^2 + 2lx + l^2 \\ (k^2 - 1)x^2 - 2lx + k^2 a^2 - l^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

és $k^2 - 1 > 0$ folytán oszthatunk $k^2 - 1$ -gyel

$$(1) \quad x^2 - 2\frac{l}{k^2 - 1}x + \frac{a^2 k^2 - l^2}{k^2 - 1} = \left(x - \frac{l}{k^2 - 1}\right)^2 + \frac{(a^2 k^2 - l^2)(k^2 - 1) - l^2}{(k^2 - 1)^2} \geq 0.$$

Mivel itt l a függvény legkisebb elért értéke, ez csak úgy lehet, ha

$$(a^2 k^2 - l^2)(k^2 - 1) - l^2 = k^2(a^2 k^2 - l^2 - a^2) = 0$$

azaz

$$\begin{aligned} l^2 &= a^2(k^2 - 1) \\ l &= a\sqrt{k^2 - 1} \end{aligned}$$

és ekkor ahol a függvény eléri ezt a minimumot, ott az (1) kifejezés is 0. Ilyen x érték egy van:

$$x = \frac{l}{k^2 - 1} = \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

II. Megoldás: A feladatot geometriai úton is meg lehet oldani. Ismét elég pozitív x -ekre szorítkozni. Ekkor $\sqrt{a^2 + x^2}$ egy olyan derékszögű háromszög átfogóját jelenti, melynek befogói a és x hosszúságúak. Legyen az x oldal mellett fekvő szög α , akkor $x = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$ és $\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\sin \alpha}$. Célszerű lesz k helyett is trigonometria kifejezést keresni.

Tekintve, hogy $k > 1$, van egy olyan φ hegyes szög, melyre $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ mivel $k \neq 1$, $\varphi > 0$, ekkor a függvény így írható át:

$$f(x) = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{a}{\sin \alpha} - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} = a \left(\frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = a \left(\frac{1 - \cos \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha \cos \varphi} \right).$$

Vonjunk ki és adjunk hozzá a függvényhez $a \cdot \operatorname{tg} \varphi$ -t:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(\frac{1 - \cos \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha \cos \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \right) = \\ &= a \left(\frac{1 - (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \right) = a \left(\frac{1 - \cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \right). \end{aligned}$$

A függvény értéke akkor lesz minimális, ha az első tag 0, vagyis, ha $\cos(\alpha - \varphi) = 1$ és így $\alpha = \varphi$, tehát $x = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi} =$

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1}} = \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

és a minimális érték

$$a \operatorname{tg} \varphi = a\sqrt{k^2 - 1}.$$