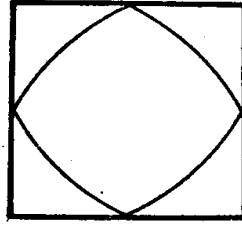
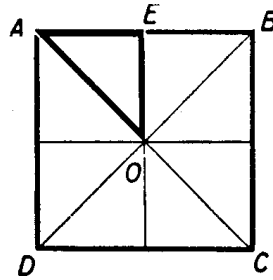


I. megoldás: Jelöljük ki a négyszög azon pontjait, melyek egy csúctól éppen $\sqrt{5}/2$ távolságra vannak. Olyan körívet kapunk, mely a szemközti csúcsból induló két oldal középpontján megy keresztül.



Csak az ezen a köríven túl eső pontok vannak az első csúctól $\sqrt{5}/2$ -nél nagyobb távolságra. Ha mind a négy csúcshoz kijelöljük azokat a pontokat, melyek attól $\sqrt{5}/2$ nagyobb távolságra vannak, akkor a négy keletkező idom nem nyúlik egymásba, mert a határoló körívek az oldalközéppontokon mennek át. Így nincs olyan pont, amelyik két idom belsejében lenne egyszerre, tehát mely egyszerre két csúctól lenne $\sqrt{5}/2$ -nél nagyobb távolságra.

II. megoldás: Legyen $ABCD$ az egységnyi oldalhosszúságú négyzet. Húzzuk meg az átlókat és az oldalak középpontjait összekötő egyeneseket. Ezek nyolc háromszögre osztják a négyzetet. Ha az egyikben volna olyan P pont, mely egynél többtől volna nagyobb távolságra, mint $\sqrt{5}/2$, akkor mindegyikben volna, mert tükrözve sorra a meghúzott egyenesekre az egész négyzet mindig magába megy át. Úgy azonban, hogy egy kis háromszög az egész négyzetet végigjárja. Mindazok a pontok, amelyekkel P eközben helyet cserél, szintén legalább két csúctól volnának $\sqrt{5}/2$ -nél nagyobb távolságra, tehát mindegyik háromszögben volna ilyen pont.



Elég tehát egy háromszögről megmutatni, hogy nincs benne olyan pont, mely két csúctól $\sqrt{5}/2$ -nél nagyobb távolságra van. Legyen E az AB oldal középpontja, O a négyzet középpontja és nézzük az $AOE\Delta$ -et. A -tól legmesszebb az O pontja van, távolsága $1/\sqrt{2}$. B -től a háromszög A csúcsa van legmesszebb, 1 távolságra. C -től a legtávolabbi pont szintén A , távolsága $\sqrt{2}$, ez $\sqrt{5}/2$ -nél nagyobb. Végül D -től a háromszög E csúcsa fekszik legmesszebb, éppen $\sqrt{5}/2$ távolságra.

Ezzel pontosabban azt bizonyítottuk be, hogy a négyzetben levő pontoknak a négy csúctól vett távolsága közül a legnagyobb legfeljebb $\sqrt{2}$, a második legfeljebb $\sqrt{5}/2$, a harmadik legfeljebb 1 lehet, és a legkisebb is elérheti az $1/\sqrt{2}$ értéket. De fordítva is: van olyan pont, amelyik egy csúctól $\sqrt{2}$ távolságra van: a szemközti csúcs, van olyan pont, mely két csúctól legalább $\sqrt{5}/2$ távolságra van, például E (C -től és D -től éppen $\sqrt{5}/2$ távolságra van). Három csúctól legalább 1 távolságra van a negyedik csúcs; végül az O középpont egy csúcshoz sincs $1/\sqrt{2}$ -nél közelebb.