

Jelöljük az $\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ kifejezést a_n -nel. Nyilvánvaló (mint azt a Csebysev-tétel 13. feladatának megoldásánál – K. M. L. 1950. 10. 206. oldal – is láttuk), hogyha bizonyos n -re $a_n < 1/4^2$, illetőleg $a_n < 1/4^3$, úgy ez minden n -nél nagyobb indexre is igaz, hiszen $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n < a_n$.

Tehát elég azt a legkisebb n -et keresni, melyre ez igaz. Kérdés, lehet-e egyáltalán n -et olyan nagyra választani, hogy ez teljesüljön. Megmutatjuk, hogy ez lehetséges.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{4^n} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{1}{2^n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Mivel $(1-x)(1+x) < 1$, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (1) \quad a_n &< \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} < \\ &< \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

(A nevezőt ugyanis kisebbítjük azáltal, hogy a zárójelek beszorzásánál a részletszorzatok egyrészét elhagyjuk.)

De tudjuk, hogy az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ sor összege tetszőlegesen nagy lehet, ha n -et elég nagyra választjuk. Ez azt jelenti, hogy találhatunk olyan küszöbszámot, melytől kezdve $\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} < \frac{1}{4^2}$ és olyant is, melytől $\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} < \frac{1}{4^3}$, vagyis olyant, amelynél kezdve $\binom{2n}{n} < 4^{n-2}$ ill. olyant, amelynél kezdve $\binom{2n}{n} < 4^{n-3}$. Ugyanúgy tetszőleges k -hoz mindig találni olyan számot, melytől kezdve $\binom{2n}{n} < 4^{n-k}$.

Egy-egy ilyen küszöbszámot meg is tudunk keresni. Olyan n -re van szükségünk, melyre (1) nevezőjében szereplő sor összege nagyobb 32-nél, illetve 128-nál. A szokott módon eljárva az

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \\ + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

összeg minden zárójelében $1/2$ -nél több van, így az összeg nagyobb, mint, $1 + \frac{k}{2}$, vagyis (1) szerint

$$a_{2^k} < \frac{4}{2+k}.$$

Így azt kapjuk, hogy $a_n < \frac{1}{16}$, azaz $\binom{2n}{n} < 4^{n-2}$, ha $n > 2^{62}$ és $\binom{2n}{n} < 4^{n-3}$, ha $n > 2^{254}$. Természetesen távolról sem a legkisebb küszöbszámot kaptuk, hisz lényeges elhanyagolásokat tettünk azért, hogy könnyen áttekinthető egyenlőtlenséget nyerhessünk.