

I. megoldás: Számítással nem sok nehézséget ad a feladat megoldása. Általában megmutatjuk, hogy az összes olyan háromszögek közül, melyeknek egyenlő a kerülete és ezen kívül egyenlő a γ szögük, abban lesz az ezzel szemkötti c oldal a legkisebb, melyben $\alpha = \beta$. Kifejezzük a kerületet a c oldal segítségével. A sinus-tétel szerint

$$\begin{aligned} k &= a + b + c = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} + c = \frac{c}{\sin \gamma} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \\ &= \frac{c}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \left(2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{c}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Innen

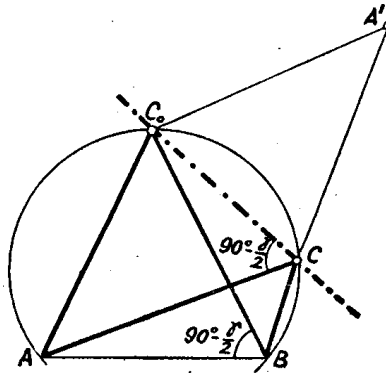
$$c = \frac{k \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}$$

A jobb oldalon csak a nevező első tagja változhat, c akkor a legkisebb, ha ez a tag legnagyobb, tehát ha $\alpha = \beta$.

II. megoldás: Az eredmény olyan egyszerű, hogy érdemes megpróbálni, kevesebb geometriai ismeret felhasználásával, számolás nélkül is bebizonyítani. Eredeti formájában azért nehéz hozzáfogni a kérdéshez, mert az ismert távolság, a kerület három oldalból tevődik össze. Át lehet azonban alakítani a feladatot úgy, hogy egy oldal legyen változatlan.

Az előbbi megoldásban kimondott általánosabb alakjában bizonyítjuk ismét a tételt és ugyanazokat a jelöléseket is használjuk. Vegyünk különböző alakú olyan háromszögeket, melyeknek kerülete és γ szöge egyenlő. Nagyítsuk vagy kicsinyítsük őket úgy, hogy mindegyiknek egyenlő legyen a c oldala. Minél kisebb volt eredetileg a c oldal, annál nagyobb lesz az új háromszög kerülete. A háromszög alakja nem változik. Így most olyan háromszögeket kaptunk, melyekben egyenlő a γ szög és a vele szemben fekvő c oldal. Ezek közül legnagyobb lesz a kerülete annak, amelyiknek eredetileg legkisebb volt a c oldala. Most tehát az előbbi állítás helyett azt kell megmutatnunk, hogy *azon háromszögek közül, melyeknek egyenlő egy szögük és a vele szemben levő oldaluk, az egyenlőszárúnak legnagyobb a kerülete.*

Ha ezeket a háromszögeket közös c oldal fölé rajzoljuk le, akkor a C csúcsok egy köríven fekszenek. Legyen ABC egy tetszőleges e háromszögek közül, ABC_0 , pedig az egyenlőszárú.



Mivel AB oldaluk közös, azt kell megmutatnunk, hogy $AC_0 + BC_0 > AC + BC$. Legyen C mondjuk a BC_0 félíven. Mérjük AC -t BC -nek C -n túli meghosszabbítására, vagy ami ezzel egyet jelent, tükrözzük AC -t az ABC_Δ C -ben húzott külső szögfelezőjére. A tükröképe legyen A' .

Ez a szögfelező az AC oldallal $\frac{180^\circ - \gamma}{2}$ nagyságú szöget zár be, ugyanakkorát, mint amekkorák az egyenlőszárú háromszög alapján fekvő szögek. Ekkor azonban a szögfelező és a BC_0 szár a körön metszik egymást, vagyis a C -ben húzott szögfelező átmegy a C_0 -on is. Így C_0A' az AC_0 tükröképe a CC_0 egyenesre. Ezek szerint

$$AC_0 + C_0B = A'C_0 + C_0B > A'B = A'C + CB = AC + CB.$$

Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

III. megoldás: Az előző megoldás utat mutat arra is, hogy próbálhatjuk meg átfogalmazás nélkül is tisztán geometriai úton bizonyítani be állításunkat. Mérjük fel az adott PQ kerületet és szerkesszük meg ebből kiindulva a különböző alakú, de egyenlő kerületű és egyenlő nagy γ szöggel rendelkező háromszögeket.

