

I. megoldás: Egy egész számokra vonatkozó azonosság bizonyítására mindég kézenfekvő a teljes indukció: $n = 1$ -re az állítás: $1 \cdot (a - 1) = 1 \cdot 2 \cdot (3a - 2 - 1)/6$, ami igaz. Tegyük fel, hogy valamely n értékre már tudjuk az azonosság helyességét, megmutatjuk, hogy ebből következik az azonosság helyessége a következő egész számra, $n + 1$ -re is. Feltétel szerint

$$\begin{aligned} & \{1 \cdot (a - 1) + 2 \cdot (a - 2) + \dots + n(a - n)\} + (n + 1)(a - n - 1) = \\ &= \frac{n(n + 1)(3a - 2n - 1)}{6} + (n + 1)(a - n - 1) = \{(n + 1)/6\}[3an - 2n^2 - \\ & \quad - n + 6a - 6n - 6] = \{(n - 1)/6\} \cdot [3an + 6a - 2n^2 - 7n - 6] = \\ & \quad = \{(n + 1)/6\}[3a(n + 2) - (n + 2)(2n + 3)] = \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)(3a - 2n - 3)}{6} = \frac{(n + 1)(n + 2)(3a - 2(n + 1) - 1)}{6}, \end{aligned}$$

tehát valóban visszanyertük a bizonyítandó formulát, csak n helyébe $n + 1$ -et írva.

a helyébe $n + 1$ -et írva, nyerjük a második azonosságot.

$a = 1$ -et írva és (-1) -gyel szorozva viszont az ugyancsak

érdekes $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n - 1)n = (n - 1)n(n + 1)/3$ összefüggést kapjuk, amihez $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = (n + 1)/2$ -t adva, nyerjük a számok négyzetösszegére már ismert kifejezést. (Természetesen legkönnyebb lett volna azt is teljes indukcióval bizonyítani, ha már ismerjük a végeredményt. De valakinek arra is rá kellett jönnie, hogy mi ez a végeredmény.)

II. megoldás: Ha a számok négyzetösszegét már ki tudjuk egyszerűbben számítani, akkor

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (a - 1) + 2 \cdot (a - 2) + 3 \cdot (a - 3) + \dots + n \cdot (a - n) = \\ &= a + 2a + 3a + \dots + na - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \\ &= n(n + 1)a/2 - n(n + 1)(2n + 1)/6 = \frac{n(n + 1)(3a - 2n - 1)}{6}, \end{aligned}$$

amiből helyettesítéssel nyerjük ismét a második azonosságot.