

I. Megoldás: A 126. feladat szerint, ha egy n -ed fokú egyenlet egy x_1 gyökét ismerjük, felírhatunk egy $(n - 1)$ -ed fokú egyenletet, melynek az egyenlet összes x_1 -től különböző gyöke gyöke lesz. Ezt ismételve, két gyök ismerete esetén $n - 2$ -ed fokú, stb., ha $n - 1$ gyököt ismerünk, olyan elsőfokú egyenletet kapunk, melynek eleget tesz az egyenletnek az első $n - 1$ -től különböző minden gyöke. De az elsőfokú egyenletnek egyetlen gyöke van. Ez tehát ez esetben az eredeti egyenlet n -edik darab gyöke és több gyök nem lehetséges.

Bognár János (Bp.-i Evangélikus gimn. VI. o.)

II. Megoldás: A 126. feladat szerint, ha a $\varphi_n(x) = 0$ n -ed fokú egyenletnek x_1 egy gyöke, akkor $\varphi_n(x) = (x - x_1) \cdot \varphi_{n-1}(x)$, ahol $\varphi_n(x) = 0$ -nak minden x_1 -től különböző gyöke gyöke a $\varphi_{n-1}(x) = 0$ $n - 1$ -ed fokú egyenletnek is. Ha van egy második x_2 gyök, akkor ugyanezt alkalmazva az x_2 gyökre, s a $\varphi_{n-1}(x)$ polinomra: $\varphi_{n-1}(x) = (x - x_2)\varphi_{n-2}(x), \dots$ Ha van az egyenletnek n különböző gyöke, akkor az eljárást az n gyökre ismételve, végül:

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= (x - x_{n-1})\varphi_1(x) \text{ és} \\ \varphi_1(x) &= a(x - x_n).\end{aligned}$$

Ezekből: $\varphi_n(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$, tehát az n -ed fokú egyenlet baloldala azonosan egyenlő n elsőfokú gyöktényező szorzatával. Most bebizonyítom, hogy több gyök nem lehet. Tegyük fel, hogy az n -ed fokú egyenletnek az $x_1, x_2, \dots, x_n$ n -számú gyökén kívül van még egy X gyöke. Ha ezt behelyettesítem:

$$\varphi_n(x) = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \dots (X - x_n).$$

Ezen egyenlet baloldala a feltevés szerint 0, viszont a jobboldal nem lehet 0, mert a másik feltevés szerint $X \neq x_1, X \neq x_2, \dots, X \neq x_n$. A feltevés lehetetlensége be van bizonyítva.

Párkány Mihály (Békéscsabai gimn. VIII. o.)

Megjegyzés: Amint látjuk, a gyöktényező kiemelése igen hasznos eszköz egyenletekre vonatkozó kérdésekben, ha van az egyenletnek gyöke. Hogy van-e, az attól is függ, hogy milyen számokat engedünk meg gyökök gyanánt. A pozitív számok körében még nem is minden elsőfokú egyenletnek van megoldása. De másodfokúnak már az összes valós számok közül sem mindig akad gyöke. Annál meglepőbb volt GAUSS felfedezése, hogy a komplex számok körében már minden egyenletnek van legalább egy gyöke. A tétel úgy igaz, hogy közben az egyenletben előfordult együtthatók is tetszőleges komplex számok lehetnek. GAUSS maga a tételre 6 különböző bizonyítást adott. Ez is mutatja a tétel fontosságát. Ezt a tételt szokás az algebra alaptételének nevezni. A bizonyításhoz természetesen alaposan kell ismerni a komplex számokat.

Ennek a tételnek segítségével az is következik, hogy minden n -ed fokú polinom felbontható n gyöktényező szorzatára. Legyen ugyanis $f(x)$ n -ed fokú polinom. $f(x) = 0$ -nak van gyöke. Legyen ez x_1 . Ekkor $f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$, ahol $f_1(x)$ $n - 1$ -ed fokú polinom. $f_1(x) = 0$ -nak ismét van legalább egy gyöke, x_2 és $f_1(x) = (x - x_2)f_2(x)$, tehát $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)f_2(x)$. Ezt egész addig folytathatjuk, míg az utolsó gyöktényező kiemelése után konstans hányados marad. Ez épp az n -edik gyöktényezőnél következik be, tehát:

$$f(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

A gyöktényezők közt lehetnek egyenlők is. Ha mind különböző, akkor pont n gyöke van az egyenletnek. De könnyű – és célszerű – úgy számlálni össze a gyököket, hogy mindig n gyöke legyen az n -ed fokú egyenletnek. Számítsunk minden gyököt annyiszor, ahány gyöktényezőben előfordul. Pl. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ egyenlet bal oldala így írható: $(x^2 - 1)^3 = (x - 1)^3(x + 1)^3$, tehát az egyenlet két különböző gyöke: $+1$ és -1 háromszoros gyökök. Ezt a „3”-at a gyök *multiplicitásának* nevezzük. *Ha tehát minden gyököt annyiszorosan számolunk, amennyi a multiplicitása, akkor n -ed fokú egyenletnek n gyöke van.*

Szerk.