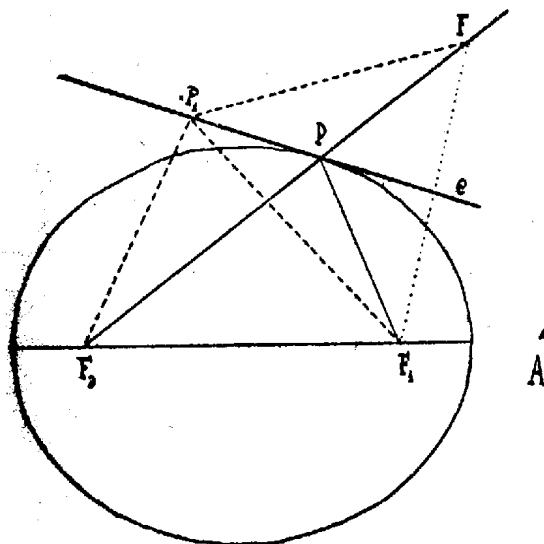


(32. ábra.) Legyen az ellipszis fókusza F_1 és F_2 egy tetszőleges pontja P . Az e egyenes felezze az F_1P egyenes meghosszabbítása és az F_2P egyenes közti szöget.



32. ábra

e az ellipszis érintője, mert P az egyetlen közös pontja az ellipszissel. Tükrözzük ugyanis F_2 -t az e egyenesre. Az F tükörkép az F_1P egyenes meghosszabbítására esik, mert e szögfelező. Legyen P_1 az e egyenes egy tetszőleges P -től különböző pontja. F_1 , P_1 és F nem esnek egy egyenesbe, s így a háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$F_1P_1 + P_1F > F_1F = F_1P + PF.$$

A tükrözés folytán $P_1F = P_1F_2$ és $PF = PF_2$, tehát

$$F_1P_1 + P_1F_2 > F_1P + PF_2,$$

ez pedig az ellipszis definíciója szerint azt jelenti, hogy P_1 nem fekszik semmiképpen az ellipszisen.

Megoldotta: Aradi E., Szépfalusi P., Tarnóczyi T., Vörös M.

Analitikus geometria segítségével : Aradi E., Czibere T. és Nagy F., Gacsányi S., Gehér L., Kővári T., Párkány M., Róna P., Tamás I.

Megjegyzés: A bizonyítás csak annyit mutat, hogy az e egyenesnek csak egyetlen pontja közös az ellipszissel. Egy négyzet csúcán pl. több olyan egyenes is húzható azonban, melynek a négyzettel nincs több közös pontja, de vonakodnánk ezeket a „négyzet érintői”-nek nevezni. Hogy az ellipszisenél nincs szó olyan pontról, amelyen a négyzet csúcsa, azt is meg lehet azonban mutatni, pontosabban azt, hogy a P ponton átmenő minden más f egyenesnek van még egy metszéspontja az ellipszissel. Az f egyenesen is van olyan P_0 pont – az előbbiek alapján könnyű meg is szerkeszteni P_0 -t – melyben az F_1P_0 és P_0F_2 az f egyenessel egyenlő hegyes szögeket zár be. Erre a pontra $F_1P + PF_2 > F_1P_0 + P_0F_2$. Ha a P_0 -ból tovább haladunk az f P -t nem tartalmazó felén, akkor az F_1 és F_2 -től való távolság összege ismét növekszik és tetszőlegesen nagy lesz, ha elég messzire mentünk az f egyenesen. Így valahol közben kell újra egy olyan P_1 pontnak lennie, melyre $F_1P_1 + P_1F_2 = F_1P + PF_2$, mely tehát az ellipszisen fekszik. P_1 és P különböző, mert P_0 különböző oldalán fekszenek.

Szerk.