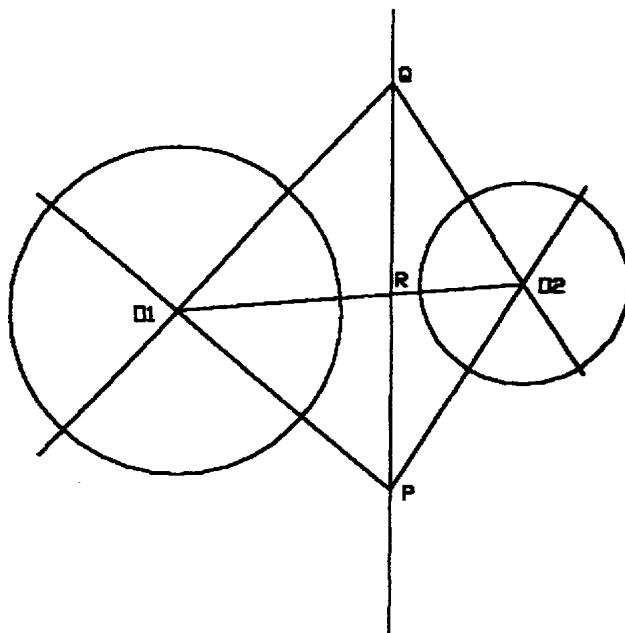




- a) Húzzunk P és Q -ből szelőket O_1 , illetve O_2 -n keresztül. Ekkor a hatvány definíciója értelmében $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$; $PO_1^2 - r_1^2 = QO_2^2 - r_2^2$, vagyis $PO_1^2 - QO_1^2 = PO_2^2 - QO_2^2$, másképp $PO_1^2 - QO_2^2 = PO_2^2 + QO_1^2$ vagyis PO_1QO_2 négyszög szemközti oldalainak négyzetösszege megegyezik, tehát PQ és O_1O_2 átlói merőlegesek egymásra.
- b.) Jelentse R a PQ és az O_1O_2 metszéspontját. Az RO_1 és az RO_2 szelőkre nézve: $RO_1^2 - r_1^2 = PO_1^2 - PR^2 - r_1^2$, $RO_2^2 - r_2^2 = PO_2^2 - PR^2 - r_2^2$, s így $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$ miatt $RO_1^2 - r_1^2 = RO_2^2 - r_2^2$ vagy R -nek k_1 -re és k_2 -re való hatványa megegyezik. Legyen S PQ tetszés szerinti pontja, akkor $SO_1^2 - r_1^2 = RO_1^2 - SR^2 - r_1^2$ és $SO_2^2 - r_2^2 = RO_2^2 + SR^2 - r_2^2 = SO_1^2 - r_1^2$, mert $RO_2^2 - r_2^2 = RO_1^2 - r_1^2$. Legyen T olyan pont, melyre $TO_1^2 - r_1^2 = TO_2^2 - r_2^2$. Legyen T -nek O_1O_2 -re való vetülete T' . Ekkor $TO_1^2 - r_1^2 = T'O_1^2 + T'T^2 - r_1^2 = TO_2^2 - r_2^2 = T'O_2^2 + T'T^2 - r_2^2$, vagyis $T'O_1^2 - r_1^2 = T'O_2^2 - r_2^2$. Az O_1O_2 egyenes T' pontjának k_1 és k_2 -re vonatkozó hatványa egyenlő, tehát $T' = R$, T rajta van PQ -n.
- c) A k és k_1 , illetve k és k_2 hatványvonalainak metszéspontja legyen M . Ekkor M -nek k_1 és k_2 -re vonatkozó hatványa ugyanaz, mint M -nek k -ra vonatkozó hatványa, tehát a k_1 és k_2 -re vonatkozó hatványa egyenlő, vagyis rajta van a PQ egyenesen.
- d.) A c.) alapján lehet k_1 és k_2 hatványvonalát megszerkeszteni. Egy k körrel metszük ki k_1 és k_2 -t hatványvonalaik metszéspontjából O_1 és O_2 -re merőlegest kell szerkeszteni.