

A feltétel miatt a feladatnak csak  $n \geq 2$ -re van értelme.

Az  $x^2 + a_k x + b_k = 0$  másodfokú egyenletnek akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa  $D = a_k^2 - 4b_k \geq 0$ .  
Tegyük fel, hogy egyik egyenletnek sincs valós gyöke, vagyis mindegyik  $k$ -ra  $a_k^2 < 4b_k$ . Ekkor

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 < 4 \sum_{k=1}^n b_k = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel:

$$2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) < 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1).$$

Átalakítva:

$$(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2) + (a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3) + \dots + (a_n^2 + a_1^2 - 2a_n a_1) < 0.$$

Ez azonban lehetetlen, hiszen mindegyik zárójelben két tag különbségének négyzete szerepel, ami nem lehet negatív.  
Ellentmondásra jutottunk, vagyis az egyenletek között létezik olyan, amelyiknek van valós gyöke.