

Igaz-e, hogy

$$(1) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{30}{2^{30}} < 2?$$

Megoldás. Jelöljük (1) bal oldalán az első n tag összegét S_n -nel, és írjuk fel ennek néhány kezdő értékét a következő alakban:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}, \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} = 2 - \frac{2+2}{2^2}, \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} = 2 - \frac{3+2}{2^3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Azt sejtjük, hogy ez általában is igaz, vagyis $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Ezt fogjuk a teljes indukció módszerével igazolni.

$n = 1$ -re állításunk igaz. Be kell látni, hogy a tulajdonság öröklődik, vagyis abból, hogy k -ra igaz, következik $(k+1)$ -re is.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2k+4-k-1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}.$$

Ezzel beláttuk, hogy állításunk minden n természetes számra érvényes; speciálisan $S_{30} = 2 - \frac{32}{2^{31}}$, s ez valóban kisebb 2-nél.

Takács Kornél (Győr, Pattantyús Á. G. Ip. Szki. II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A feladatnak többféle megoldása lehetséges. A megoldók egy része az összeget 30 mértani sorozatra bontotta fel, s ezeket összegezte.

2. Volt, aki a törtet 2-es számrendszerbeli tizedes törtre írta át, s így végezte az összegzést.

3. Könnyen igazolható az egyenlőtlenségnek egy általánosabb alakja is. Legyenek n és k természetes számok; ekkor

$$\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2^2} + \dots + \frac{k+n}{2^{n+1}} < k+1.$$

Szorozzuk végig az egyenlőtlenséget 2-vel, és a bal oldalon lévő k egészet vonjuk ki; ekkor a jobb oldalon $2(k+1) - k = (k+2)$ -t kapjuk. Majd újra 2-vel végigsorozva és $(k+1)$ -et kivonva, a jobb oldal $k+3$ lesz. Az eljárást folytatva, az $(n+1)$ -edik lépésben a $0 < k+n+2$ egyenlőtlenséghez jutunk, és ez nyilvánvalóan igaz. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, eredeti egyenlőtlenségünk is igaz.

Bognár László (Budapest, Móricz Zs. Gimn. III. o. t.) dolgozata alapján