

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(1) \quad \sin(x + 15^\circ) + \sin(x + 45^\circ) + \sin(x + 75^\circ) = \sin 15^\circ + \sin 45^\circ + \sin 75^\circ.$$

Megoldás. A $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ azonosságot alkalmazzuk az $\alpha = x + 75^\circ$, $\beta = x + 15^\circ$ választásával az (1) egyenlet bal oldalán:

$$\sin(x + 75^\circ) + \sin(x + 15^\circ) = 2 \sin(x + 45^\circ) \cdot \cos 30^\circ.$$

Ismét alkalmazzuk az azonosságot $\alpha = 75^\circ$ és $\beta = 15^\circ$ választással az (1) egyenlet jobb oldalán,

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ.$$

Így (1) a következőképpen írható:

$$2 \sin(x + 45^\circ) \cos 30^\circ + \sin(x + 45^\circ) = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ.$$

Kiemelve $\sin(x + 45^\circ)$ -t a bal, $\sin 45^\circ$ -t a jobb oldalon:

$$\sin(x + 45^\circ)[2 \cos 30^\circ + 1] = \sin 45^\circ(2 \cos 30^\circ + 1).$$

Mivel $2 \cos 30^\circ + 1 \neq 0$, egyszerűsíthetünk vele (nem veszünk gyököt sem).

Kapjuk, hogy

$$\sin(x + 45^\circ) = \sin 45^\circ;$$

ez akkor teljesül, ha

$$\begin{array}{ll} x + 45^\circ = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, & \text{azaz } x = k \cdot 360^\circ, \\ \text{vagy } x + 45^\circ = 135^\circ + k \cdot 360^\circ, & \text{azaz } x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad (k \in \mathbf{Z}). \end{array}$$

Illés Mónika (Sátoraljaújhely, Kossuth Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján