

Sokféle, igen érdekes megoldás érkezett. Vázlatosan közöljük ezeket.

Tegyük fel, hogy van ilyen téglatest. Jelölje a, b, c a téglatest éleit. Ekkor az egyenletek

$$\begin{aligned}(1) \quad & 4a + 4b + 4c = 48, \\(2) \quad & 2 = 2ab + 2bc + 2ca, \\(3) \quad & 12 = (ab) \cdot c.\end{aligned}$$

1. (1)-ből $c = 12 - (a + b)$ -t helyettesítve (2)-be és (3)-ba az

$$\begin{aligned}(2') \quad & 1 = ab + (12 - (a + b))(a + b), \\(3') \quad & 12 = (ab)(12 - (a + b)),\end{aligned}$$

$(a + b)$ -re és (ab) -re kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk. Ezt megoldva olyan gyökök kapunk, amely a feladat feltételeit nem elégíti ki. Tehát nincs ilyen téglatest.

2. Tekintsük a fenti egyenletrendszert! Jelöljük az éleket nagyság szerint: $a \leq b \leq c$. A feladatból: $0 < a, b, c$, tehát (2)-ben $ab, bc, ca < 1$. Ezért legfeljebb c él lehet nagyobb vagy egyenlő 1-gyel, hiszen ha b és c is nagyobb vagy egyenlő mint 1, akkor $bc \geq 1$. Így $0 < a < b < 1 < c$ vagy $0 < a < b < c < 1$. (3)-ból így $0 < ab < 1$ miatt $c > 12$ -nek kell teljesülnie. Ez pedig ellentmond (1)-nek. Tehát nem létezik ilyen téglatest.

3. $a, b, c > 0$ miatt alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget $n = 3$ esetén.

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq \sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} = \sqrt[3]{(abc)^2}.$$

A feladatból az egyenlőtlenség bal oldalán $\frac{1}{3}$, jobb oldalán $\sqrt[3]{144}$ áll, ez ellentmondás.

Megjegyzés: Itt a három feltételből csak kettőt használtunk, sőt az is látszik, hogy milyen „bőkezűen” bántunk az adatokkal.

4. Jelöljük most x_1, x_2, x_3 -mal az éleket! Így (1), (2), (3) így alakul:

$$\begin{aligned}(1'') \quad & -(x_1 + x_2 + x_3) = -12 \\(2'') \quad & (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1 \\(3'') \quad & -x_1x_2x_3 = -12.\end{aligned}$$

A gyökök – együttthatók közti összefüggés értelmében így az éleket az

$$(4) \quad x^3 - 12x^2 + x - 12 = 0$$

egyenlet valós gyökei adják. (4)-ben $(x - 12)$ -t kiemelve a következő egyenletet kapjuk:

$$(x - 12)(x^2 + 1) = 0.$$

Mint látjuk, ennek az egyenletnek egy valós és két komplex gyöke van, így a fenti kikötéseknek eleget tevő téglatest nem létezik.

2 pont járt a helyes bizonyításért. Az 1. típusú megoldásnál sokan osztottak ismeretlent tartalmazó tényezővel, de nem vizsgálták meg, hogy az osztó lehet-e nulla. A 2.-nál általában $0 < ab < 1$ indoklása volt hiányos, ezért 1 pontotadtunk.

Néhányan konkrét eseteket vizsgáltak, csak az egész számokat vették figyelembe. A feladatban azonban nem szerepelt az a kikötés, hogy a téglatest élei egészek. Ezekre a megoldásokra 0 pontotadtunk. Nem kaptak még pontot a nem versenyszerű (osztály nélküli, másolt) dolgozatok.