

Láttuk, hogy a hatványközepek, ha a kitevőt nagyon kicsinek választjuk, tetszés szerint közel jutnak a mértani középhez. Kérdés most, mit tudunk mondani a hatványközepekről, ha a kitevő „nagyon nagy” lesz és ha „nagyon nagy” negatív értékeket vesz fel. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$, az adott nem negatív számok. Rendezzük őket mindjárt nagyság szerint, tehát legyenek pl. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ és ne legyenek az összes a -k egyenlők. Képezzük a $q_1, q_2, \dots, q_k$ (pozitív) súlyokkal súlyozott r -edik hatványközepeket, tehát ha $q_1 + q_2 + \dots + q_k = 1$, a

$$H_r = (q_1 a_1^r + q_2 a_2^r + \dots + q_k a_k^r)^{1/r}$$

kifejezést.

Ez sem túl nagy, sem túl kicsi nem lehet. Legyen először r pozitív. Csökkentsük egyrészt a kifejezést úgy, hogy csak az utolsó tagot tartjuk meg belőle, másrészt növeljük a kifejezést, ha mindegyik a helyett a legnagyobbat írjuk. Így kapjuk, hogy

$$q_k^{1/r} a_k \leq H_r \leq [(q_1 + q_2 + \dots + q_k) a_k^r]^{1/r} = a_k.$$

Ha viszont a kitevő $-r$ negatív szám, (tehát a fenti kifejezés tulajdonképpen nevezőben áll és ott is az a -k hatványainak reciprokai állnak), akkor nagyobbítjuk a kifejezés értékét, ha tagokat elhagyunk, pl. csak az elsőt tartjuk meg, viszont kisebbítjük, ha az egyes tagokat nagyobbítjuk pl. minden a -nak a $-r$ -edik hatványa helyébe a_1^{-r} -t írunk. Így azt kapjuk, hogy

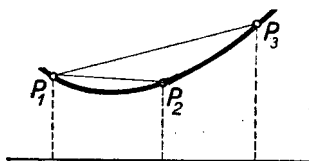
$$(1/q_1)^{1/r} a_1 = (q_1 a_1^{-r})^{-1/r} > H_r \geq [(q_1 + q_2 + \dots + q_k) a_1^{-r}]^{-1/r} = a_1.$$

1

Az előző közleményünk segédételében megmutattuk (más jelöléseket használva), hogy ha c pozitív szám, akkor az u pozitív hatványkitevőt elég kicsinek választva elérhetjük, hogy c^u tetszés szerint kevéssel különbözzék 1-től. Ezt egyrészt $c = q_k$ -val, másrészt $c = 1/q_1$ -gyel, mindkét esetben $u = 1/r$ -rel alkalmazva azt nyerjük, hogy egyrészt választhatjuk $1/r$ -et elég kicsinek, tehát r -et elég nagynak ahhoz, hogy $q_k^{1/r} a_k$ tetszés szerint kevéssel különbözzék a_k -tól, másrészt ismét r -et elég nagynak választva elérhető, hogy $(1/q_1)^{1/r} a_1$ tetszés szerint kevéssel különbözzék a_1 -től. Az így választott kitevőkkel véve a H_r hatványközép is tetszés szerint közel lesz a_k -hoz, ill. a H_{-r} közép tetszés szerint közel jut a_1 -hez. Így ha a kitevőt minden határon túl növeljük, a hatványközép tetszés szerint közel kerül az a -k legnagyobbikához, ha pedig negatív értékeken át minden határon túl csökkentjük, akkor tetszőlegesen közel jut az a -k legkisebbikéhez.²

A IV. közleményben említettünk a konvexitásra jellemző néhány újabb geometriai tulajdonságot. Így egy $f(x)$ függvény görbéje konvex, egy szakaszon, ha e szakasz bármely három növekvő abszcisszája szerint következő P_1, P_2, P_3 pontjára fennáll, a következő tulajdonságok bármelyike:

- hogy a $P_1 P_2$ húr a $P_1 P_3$ húr alatt van,
- hogy a $P_2 P_3$ húr a $P_1 P_3$ húr alatt van,
- hogy a $P_1 P_2$ húr meghosszabbítása a $P_2 P_3$ húr alá fut.



Fejezzük ki e tulajdonságokat az algebra nyelvén. Ha két egyenesnek egy pontja közös, akkor egy nagyobb abszcissza-értéknél az van magasabban, egy kisebb abszcissza-értéknél pedig az van mélyebben, amelyiknek a meredeksége nagyobb. Az $f(x)$ görbe ξ és ξ' abszcisszájú pontok közti húrjának a meredeksége pedig

$$\frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi}.$$

Így ha a három pont abszcisszája x_1, x_2, x_3 , akkor a fenti tulajdonságokat rendre az

$$(a) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$(b) \quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$(c) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

¹ Ezzel megoldását adtuk a 380. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S., Zatykó L.

² Ezzel megoldását adtuk a 381. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S., Zatykó L.

egyenlőtlenségek fejezik ki. Mindegyik egyenlőséget átszorozhatjuk a nevezők szorzatával, mert feltétel szerint $x_1 < x_2 < x_3$ és így mindegyik nevező pozitív. Ha még a kapott egyenlőtlenséget nullára redukáljuk és $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ -at röviden y_1 , y_2 , y_3 -mal jelöljük, akkor mindhárom egyenlőtlenségből az

$$(t) \quad x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) > 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk és ez vissza is alakítható a három egyenlőtlenség bármelyikévé. A (t) egyenlőtlenség baloldalán álló kifejezés a $P_1P_2P_3$ háromszög kétszeres területének kifejezése koordináták segítségével. Így a kapott egyenlőtlenség szerint a három pont nem sorakozhat egy egyenesen, sőt azt is tudjuk, hogy ha a területet pozitív előjellel adja a képlet, akkor a P_1 , P_2 , P_3 csúcsok az óra járásával ellenkező körüljárás sorrendjében következnek. Ez a geometriai tulajdonság tekinthető a konvexitás újabb geometriai jellemzésének is, amiből könnyen következnek az (a), (b) és (c) tulajdonságok. Könnyű látni, hogy ez a geometriai tulajdonság tartalmazza a kéttagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget is, amit eredetileg a konvexitás jellemzésére használtunk. Utóbbit úgy kaptuk, hogy az algebra nyelvére fordítottuk a következő tulajdonságot: a P_2 pont a P_1P_3 húr alatt van. Mivel x_2 az (x_1, x_3) szakaszt $(x_2 - x_1) : (x_3 - x_2)$ arányban osztja, így a P_1P_3 húr x_2 abszcisszájú pontja ugyanilyen arányban osztja a húr, tehát ordinátája

$$\frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{x_3 - x_1}$$

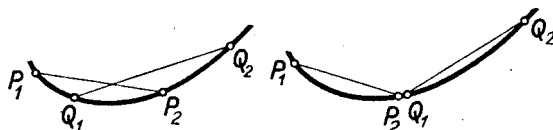
s így a mondott tulajdonságot az

$$(j) \quad f(x_2) < \frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{x_3 - x_1}$$

egyenlőtlenség fejezi ki.

Ha itt egyrészt $\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = q_1$, $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = q_2$ -t írunk, tehát $q_1 + q_2 = 1$ és x_2 helyébe a vele azonos $q_1x_1 + q_2x_3$ értéket, (ami azt fejezi ki, hogy x_2 az (x_1, x_3) szakaszt $q_2 : q_1 = (x_2 - x_1) : (x_3 - x_2)$ arányban osztja), akkor megkapjuk a Jensen-egyenlőtlenséget. Másrészt viszont a (j) egyenlőtlenség is átalakítható a (t) egyenlőtlenséggé, csupa olyan lépésekben, melyek ellenkező irányban is elvégezhetők, vagyis a (t) egyenlőtlenség átalakítható a Jensen-egyenlőtlenséggé is és viszont. Ebből az is következik, hogy az (a), (b), (c) egyenlőtlenségek mindegyike (és a (t) is) következik a Jensen-egyenlőtlenségből és megfordítva utóbbi is ezek bármelyikéből.³

Még általánosabban azt is mondhatjuk, hogy egy függvény konvex ha két húr közül, melyek egyikének mindegyik végpontja megelőzi a másik megfelelő végpontját (esetleg az egyik végpontjuk össze is eshet) mindig az első meredeksége kisebb. Legyenek a két húr végpontjának abszcisszái x_1 és x_2 ill. ξ_1 és ξ_2 , $x_1 \leq \xi_1$, $x_2 \leq \xi_2$, de a két húr ne essék egybe, akkor a feltétel így írható:



$$(d) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

Itt x_2 lehet kisebb is, nagyobb is ξ_1 -nél és össze is eshet vele. Ha itt x_1 és ξ_1 egybeesik, akkor (a)-t, ha x_2 és ξ_2 esik egybe, akkor (b)-t, ha pedig x_2 és ξ_1 , akkor (c)-t kapjuk. De utóbbiakból is következtethetünk a (d) egyenlőtlenségre. Ha valamelyik két végpont egybeesik, akkor láttuk, hogy az (a), (b) vagy (c) egyenlőtlenséget kapjuk. Ha $x_2 < \xi_1$, akkor (a) szerint

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_1} < \frac{f(\xi_1) - f(x_1)}{\xi_1 - x_1},$$

viszont (c) szerint

$$\frac{f(\xi_1) - f(x_1)}{\xi_1 - x_1} < \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

A kettőből következik (d). Ha viszont $x_2 > \xi_1$, akkor (a) szerint

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(\xi_2) - f(x_1)}{\xi_2 - x_1},$$

viszont (b) szerint

$$\frac{f(\xi_2) - f(x_1)}{\xi_2 - x_1} < \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1},$$

³ Ezzel megoldását adtuk a 382. feladatnak. Megoldotta: Kántor S., Reichlin V., Zatykó L.

a kettőből ismét következik (d). A fentebbi megfontolás szerint akkor a Jensen egyenlőtlenség teljesüléséből is következik a (d) egyenlőtlenség és megfordítva a Jensen-egyenlőtlenség is (d)-ből. ⁴

A (d) egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával nyerjük a következőt: Legyen $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_k$, $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k$, de legalább az egyik sorozat ne álljon csupa egyenlő elemből, végül vezessük be a következő jelöléseket:

$$D_1 = \frac{f(v_1) - f(u_1)}{v_1 - u_1}, \quad D_2 = \frac{f(v_2) - f(u_2)}{v_2 - u_2}, \quad \dots, \quad D_k = \frac{f(v_k) - f(u_k)}{v_k - u_k}.$$

Ekkor kapjuk, ha $f(x)$ konvex függvény, hogy

$$D_1 \geq D_2, \quad D_2 \geq D_3, \quad \dots, \quad D_{k-1} \geq D_k,$$

azaz $D_1 - D_2 \geq 0$, $D_2 - D_3 \geq 0$, $\dots$, $D_{k-1} - D_k \geq 0$.

Feltevésünk szerint nem állhat mindenütt az egyenlőség jele.

$$\begin{aligned} \text{Legyen} \quad U_1 &= u_1, \quad U_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad U_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k, \\ \text{és} \quad V_1 &= v_1, \quad V_2 = v_1 + v_2, \quad \dots, \quad V_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k. \end{aligned}$$

Ha most $U_1 < V_1$, $U_2 < V_2$, $\dots$, $U_{k-1} < V_{k-1}$, de $U_k = V_k$, akkor ezeket rendre szorozva a fenti pozitív mennyiségekkel és összeadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} U_1(D_1 - D_2) + U_2(D_2 - D_3) + \dots + U_{k-1}(D_{k-1} - D_k) + U_k D_k < \\ < V_1(D_1 - D_2) + V_2(D_2 - D_3) + \dots + V_{k-1}(D_{k-1} - D_k) + V_k D_k, \end{aligned}$$

és a D -k szerint átrendezve (miután $U_2 - U_1 = u_2$, $U_3 - U_2 = u_3$, $\dots$, $U_k - U_{k-1} = u_k$ és hasonló érvényes a V -kre) kapjuk, hogy

$$u_1 D_1 + u_2 D_2 + \dots + u_k D_k < v_1 D_1 + v_2 D_2 + \dots + v_k D_k,$$

ha az $f(x)$ függvény konvex. ⁵

Redukáljuk az egyenlőtlenséget nullára. A D -k jelentését tekintetbe véve a szorzókkal tudunk egyszerűsíteni és az

$$(f(v_1) - f(u_1)) + (f(v_2) - f(u_2)) + \dots + (f(v_k) - f(u_k)) > 0,$$

vagy

$$f(u_1) + f(u_2) + \dots + f(u_k) < f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_k)$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Tegyük most fel megfordítva, hogy egy $f(x)$ függvényről csak annyit tudunk, hogy kielégíti az utolsó egyenlőtlenséget, ha az u -k és v -k eleget tesznek a fenti feltételeknek. Legyenek ekkor $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k$ olyan számok, melyek közt vannak különbözők.

$$\text{Ekkor } v_1 > \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{k}, \quad \frac{v_1 + v_2}{2} > \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{k} \dots, \quad \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_{k-1}}{k-1} > \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{k}.$$

Így $u_1 = u_2 = \dots = u_k = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{k}$ választás mellett ki vannak elégítve a kérdéses egyenlőtlenségek s így fennáll a

$$k f\left(\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{k}\right) < f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_k)$$

egyenlőtlenség, ami nem más, mint a k -tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség. Tudjuk azonban, hogy ennek teljesüléséből következik a függvény konvex volta. $f(x)$ tehát konvex függvény. ⁶

Vizsgálatainkat átvihetjük többváltozós függvényekre is. Kétváltozós függvényt még tudunk ábrázolni a térben: a $z = F(x, y)$ függvény értékeit úgy ábrázolhatjuk, hogy a független változók egy x, y értékpárját egy síkbeli koordináta rendszerben ábrázoljuk és a függvényértékeket egy-egy ilyen pontban a síkra merőleges irányban ábrázoljuk. Minden számbajövő helyen ilyen módon ábrázolva a függvényt általában egy felület alakul ki a pontokból. Ez ismét lehet domború vagy homorú (alulról nézve). Ezekben az esetekben a függvényt is, aminek a felület a képe konvexnek, ill. konkávnak fogjuk nevezni. Pl. a konvexitást geometriailag a térben is azzal jellemezhetjük, hogy a felület két pontját összekötő húr mindig a felület fölött van. Mivel az (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , pontok közti szakaszt $q_2 : q_1$ arányban osztó pont koordinátái, ha még $q_1 + q_2 = 1$, $(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 y_1 + q_2 y_2)$ és ebben a pontban a görbén a $z_1 = F(x_1, y_1)$, $z_2 = F(x_2, y_2)$ ordináták közti húr ordinátája $q_1 z_1 + q_2 z_2$, így az említett geometriai tulajdonságot az

$$F(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 y_1 + q_2 y_2) < q_1 F(x_1, y_1) + q_2 F(x_2, y_2)$$

Jensen-egyenlőtlenség írja le. Több változó esetén már geometriailag nem tudjuk a függvényt szemléletesen ábrázolni, a konvexitás fogalmát azonban ebben az esetben is értelmezhetjük éppen a fenti egyenlőtlenség megfelelőjével. Egy

⁴ Ezzel megoldását adtuk a 385. feladatnak. *Megoldotta:* Reichlin V., Zatykó L.

⁵ Ezzel megoldását adtuk a 386. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S.

⁶ Ezzel megoldását adtuk a 387. feladatnak. *Megoldotta:* Kántor S.

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényt konvexnek nevezzük, ha bármely két $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ pontra és q_1, q_2 pozitív súlyokra, melyekre $q_1 + q_2 = 1$ fennáll az

$$\begin{aligned} F(q_1 x_1 + q_2 y_1, q_1 x_2 + q_2 y_2, \dots, q_1 x_n + q_2 y_n) &< \\ &< q_1 F(x_1, x_2, \dots, x_n) + q_2 F(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

egyenlőtlenség. Speciálisan, ha $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$, akkor kapjuk az

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \dots, \frac{x_n + y_n}{2}\right) &< \\ &< \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(y_1, y_2, \dots, y_n)}{2} \end{aligned}$$

szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget. Ismét igaz, hogy ennek a teljesüléséből következik a két és az akárhány tagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség teljesülése is, legalábbis racionális súlyok esetén. A bizonyítást kétváltozós függvényre mondjuk el. Több változóra szószerint ugyanígy történhetik, csak írni kell többet. Feltesszük tehát, hogy egy $F(x, y)$ függvényre teljesül az

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) < \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)}{2}$$

egyenlőtlenség. A Cauchy-féle gondolatmenetet követve először is megmutatjuk, hogy teljesül a hasonló, de 2^k tagú szimmetrikus egyenlőtlenség. $k = 1$ -re az állítás csak a feltéti egyenlőtlenséget jelenti. Tegyük fel, hogy valamilyen j -re már tetszés szerinti nem csupa egyenlő $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{2^j}, y_{2^j})$ pontpárok esetén bebizonyítottuk az

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^j}}{2^j}, \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{2^j}}{2^j}\right) &< \\ &< \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) + \dots + F(x_{2^j}, y_{2^j})}{2^j} \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget. Legyen most adva 2^{j+1} számú pont:

$$(x_1, y_1), \dots, (x_{2^j}, y_{2^j}), (x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) \dots (x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} &F\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^j+1} + x_{2^j+1} + \dots + x_{2^{j+1}}}{2^{j+1}}, \frac{y_1 + \dots + y_{2^j} + y_{2^j+1} + \dots + y_{2^{j+1}}}{2^{j+1}}\right) = \\ &= F\left(\frac{\frac{x_1 + \dots + x_{2^j}}{2^j} + \frac{x_{2^j+1} + \dots + x_{2^{j+1}}}{2^j}}{2}, \frac{\frac{y_1 + \dots + y_{2^j}}{2^j} + \frac{y_{2^j+1} + \dots + y_{2^{j+1}}}{2^j}}{2}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ F\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^j}}{2^j}, \frac{y_1 + \dots + y_{2^j}}{2^j}\right) + F\left(\frac{x_{2^j+1} + \dots + x_{2^{j+1}}}{2^j}, \frac{y_{2^j+1} + \dots + y_{2^{j+1}}}{2^j}\right) \right\} \leq \\ &\leq \frac{\frac{F(x_1, y_1) + \dots + F(x_{2^j}, y_{2^j})}{2^j} + \frac{F(x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) + \dots + F(x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}})}{2^j}}{2} = \\ &= \frac{F(x_1, y_1) + \dots + F(x_{2^j}, y_{2^j}) + F(x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) + \dots + F(x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}})}{2^{j+1}}. \end{aligned}$$

Ha a pontok nem mind esnek egybe, akkor nem állhat fenn mindenütt az egyenlőség jele s így teljes indukcióval bizonyítottuk állításunkat.

Ha most van tetszés szerinti számú pontunk: $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, akkor válasszuk j -t úgy hogy $2^{j-1} < k < 2^j$, ($k = 2^j$ -re már bizonyítottuk a szimmetrikus egyenlőtlenség teljesülését) és legyen

$$x = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}, \quad y = \frac{y_1 + \dots + y_k}{k}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \dots + y_k}{k}\right) = \\ &= F\left(\frac{x_1 + \dots + x_k + (2^j - k)x}{2^j}, \frac{y_1 + \dots + y_k + (2^j - k)y}{2^j}\right) < \\ &< \frac{F(x_1, y_1) + \dots + F(x_k, y_k) + (2^j - k)F(x, y)}{2^j} \end{aligned}$$

az éppen bizonyított állítás szerint, ez pedig átrendezve a

$$kF(x, y) < F(x_1, y_1) + \dots + F(x_k, y_k)$$

egyenlőtlenséget adja, vagy x és y jelentését beírva és k -val osztva

$$F\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \dots + y_k}{k}\right) < \frac{F(x_1, y_1) + \dots + F(x_k, y_k)}{k},$$

vagynis teljesül a k tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség is.

A *racióális* súlyokkal súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget mindig átírhatjuk szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséggé, melyben az egyes alappontok többször ismétlődnek. Így ezen egyenlőtlenség teljesülése is következik levezetésünkéből.

Ahhoz, hogy a tetszőleges valós súlyokkal súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget is szigorúan bebizonyíthassuk, fel kellene tenni a függvényről, hogy nem változhat hirtelen túl nagyot a függvényérték, ha az egyes változók csak nagyon kevésbé változnak. Természetesen először is ezt a nagyon hozzávetőlegesen fogalmazott tulajdonságot – amit a függvény folytonosságának nevezünk – matematikai szigorúsággal kellene megfogalmazni, azután szigorúan be kellene bizonyítani ez esetben is a Jensen-egyenlőtlenség teljesülését. Ezzel lenne teljes annak a bizonyítása, hogy a kéttagú szimmetrikus egyenlőtlenség teljesülése is elegendő ahhoz, hogy a függvény konvexitására következtethessünk. Bár ennek a részleteibe nem fogunk most belemenni, a tételt mégis fel fogjuk használni.

Nyilvánvalóan ugyanezen az úton bizonyíthatjuk azt is, hogy egy $G(x_1, \dots, x_n)$ többváltozós függvény akkor és csakis akkor konkáv, ha bármely két $(x_1, \dots, x_n)$ és $(y_1, \dots, y_n)$ „pontra”.

$$G\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \dots, \frac{x_n + y_n}{2}\right) > \frac{G(x_1, \dots, y_n) + G(y_1, \dots, y_n)}{2}.$$

Hasonló egyenlőtlenségekkel jellemezhetők a tágabb értelemben konvex és tágabb értelemben konkáv függvények is. ⁷

Példaképpen vegyük a pozitív értékekre értelmezett $\sqrt{xy}$ függvényt. Erre képezve a szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenségben szereplő két oldal különbségét:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)} - \frac{\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2})^2}{\sqrt{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)} + \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2}}. \end{aligned}$$

Itt a nevező pozitív, a számláló így alakítható tovább a négyzet tagokra bontása és összevonás után:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2\sqrt{x_1 y_1 x_2 y_2}.$$

Itt az első két tag az $x_1 y_2$ és $x_2 y_1$ számok számtani közepének, a kivonandó pedig mértani közepüknek a kétszerese. Így a különbség nem lehet negatív. A kifejezés értéke 0 lehet azonban, ha $x_1 y_2 = x_2 y_1$, azaz $x_1/y_1 = x_2/y_2$. A felület tehát tágabb értelemben konkáv. Az (x, y) síkon a kezdő ponton átmenő egyenesek fölött a felületen is egyenesek húzódnak.

A $\log(a^x + a^y)$ függvényre

$$\begin{aligned} & \frac{\log(a^{x_1} + a^{y_1}) + \log(a^{x_2} + a^{y_2})}{2} = \log \sqrt{(a^{x_1} + a^{y_1})(a^{x_2} + a^{y_2})} \geq \\ & \geq \log(\sqrt{a^{x_1+y_1}} + \sqrt{a^{x_2+y_2}}) = \log\left(a^{\frac{x_1+y_1}{2}} + a^{\frac{x_2+y_2}{2}}\right) \end{aligned}$$

az előbb bizonyított egyenlőtlenség szerint feltéve, hogy $a > 1$. Egyenlőség akkor állhat, ha $a^{x_1-y_1} = a^{x_2-y_2}$. Ha

$0 < a < 1$, akkor a fordított egyenlőtlenség érvényes, tehát $\log(a^x + a^y)$ tágabb értelemben konvex, ha $a > 1$ és tágabb értelemben konkáv, ha $0 < a < 1$.

Vizsgáljuk most az $x^{q_1} x^{q_2}$ függvényt ha x, y, q_1 és q_2 pozitív és $q_1 + q_2 = 1$. Itt az

$$\frac{x_1^{q_1} y_1^{q_2} + x_2^{q_1} y_2^{q_2}}{2} \quad \text{és} \quad \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{q_1} \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^{q_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^{q_1} (y_1 + y_2)^{q_2},$$

kifejezéseket kell összehasonlítani. A kettő hányadosát fogjuk tudni alkalmasan átalakítani, felhasználva, hogy két mennyiség súlyozott mértani közepe kisebb az ugyanazon súlyokkal súlyozott számtani közepnél.

$$\begin{aligned} & \frac{x_1^{q_1} y_1^{q_2} + x_2^{q_1} y_2^{q_2}}{(x_1 + x_2)^{q_1} (y_1 + y_2)^{q_2}} = \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}\right)^{q_1} \left(\frac{y_1}{y_1 + y_2}\right)^{q_2} + \left(\frac{x_2}{x_1 + x_2}\right)^{q_1} \left(\frac{y_2}{y_1 + y_2}\right)^{q_2} \leq \\ & \leq q_1 \frac{x_1}{x_1 + x_2} + q_2 \frac{y_1}{y_1 + y_2} + q_1 \frac{x_2}{x_1 + x_2} + q_2 \frac{y_2}{y_1 + y_2} = q_1 + q_2 = 1. \end{aligned}$$

⁷ Ezzel megoldását adtuk a 389. feladatnak.

Egyenlőség akkor állhat, ha

$$\frac{x_1}{x_1 + x_2} = \frac{y_1}{y_1 + y_2} \quad \text{és} \quad \frac{x_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_2}{y_1 + y_2},$$

azaz, ha $x_1/y_1 = x_2/y_2$. Az $x^{q_1}y^{q_2}$ függvény tehát, ha $q_1 + q_2 = 1$, tágabb értelemben konkáv. Hasonlóan az $x_1^{q_1}x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$ függvényre, ha $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; q_1, q_2, \dots, q_n$ pozitív és $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$, akkor

$$\begin{aligned} & \frac{x_1^{q_1}x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} + y_1^{q_1}y_2^{q_2} \dots y_n^{q_n}}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right)^{q_1} \left(\frac{x_2 + y_2}{2}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)^{q_n}}{2} = \\ &= \left(\frac{x_1}{x_1 + y_1}\right)^{q_1} \left(\frac{x_2}{x_2 + y_2}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{x_n}{x_n + y_n}\right)^{q_n} + \left(\frac{y_1}{x_1 + y_1}\right)^{q_1} \left(\frac{y_2}{x_2 + y_2}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{y_n}{x_n + y_n}\right)^{q_n} \leq \\ &\leq q_1 \frac{x_1}{x_1 + y_1} + q_2 \frac{x_2}{x_2 + y_2} + \dots + q_n \frac{x_n}{x_n + y_n} + q_1 \frac{y_1}{x_1 + y_1} + q_2 \frac{y_2}{x_2 + y_2} + \dots + q_n \frac{y_n}{x_n + y_n} = \\ &= q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1. \end{aligned}$$

A függvény tehát ismét tágabb értelemben konkáv. Írjuk fel a k tagú szimmetrikus egyenlőtlenséget. Jelöljünk k számú szám n -est $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), \dots, (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ -val, ekkor

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \dots + x_1^{(k)}}{k}\right)^{q_1} \left(\frac{x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + \dots + x_2^{(k)}}{k}\right)^{q_2} \dots \left(\frac{x_n^{(1)} + \dots + x_n^{(k)}}{k}\right)^{q_n} \geq \\ & \geq \frac{x_1^{(1)q_1}x_2^{(1)q_2} \dots x_n^{(1)q_n} + x_1^{(2)q_1} \dots x_n^{(2)q_n} + \dots + x_1^{(k)q_1}x_2^{(k)q_2} \dots x_n^{(k)q_n}}{k}. \end{aligned}$$

Itt, mivel $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$, a nevezőket el is hagyhatjuk.⁸

Legyen $1/r + 1/s = 1$ ($r > 1$). Alkalmazzuk az utolsó egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned} q_1 &= 1/r, \quad q_2 = 1/s, \quad n = 2, \quad x^{(1)} = a_1^r, \quad y^{(1)} = b_1^s, \quad x^{(2)} = a_2^r, \\ y^{(2)} &= b_2^s, \quad \dots, \quad x^{(k)} = a_k^r, \quad y^{(k)} = b_k^s\text{-re:} \\ (a_1^r + a_2^r + \dots + a_k^r)^{1/r} (b_1^s + b_2^s + \dots + b_k^s)^{1/s} &\geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k. \end{aligned}$$

Egyenlőség akkor áll, ha $a_1^r/b_1^s = a_2^r/b_2^s = \dots = a_k^r/b_k^s$.

Ezt az egyenlőtlenséget nevezik Hölder-egyenlőtlenségnek. Speciálisan, ha $r = s = t$, akkor

$$\sqrt[t]{a_1^t + a_2^t + \dots + a_k^t} \sqrt[t]{b_1^t + b_2^t + \dots + b_k^t} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k$$

és egyenlőség csak akkor állhat, ha $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_k/b_k$. Ezt az egyenlőtlenséget Cauchy-Schwarz-féle egyenlőtlenség néven ismerik, bár Bunyakovszkij már előbb is ismerte.⁹

A Hölder-egyenlőtlenségben

$$1/s = 1 - 1/r = (r - 1)/r, \quad s = r/(r - 1).$$

Legyen $k = 2$ és írjunk $b_1 = c_1^{r-1}$, $b_2 = c_2^{r-1}$ -et, ekkor

$$(a_1^r + a_2^r)^{1/r} (c_1^r + c_2^r)^{1-1/r} \geq a_1 c_1^{r-1} + a_2 c_2^{r-1}$$

alakban kapjuk az egyenlőtlenséget. (Egyenlőség áll, ha $a_1/c_1 = a_2/c_2$). Írjunk itt c_1, c_2 helyett $x_1 + x_2$ és $y_1 + y_2$ -t, a_1 és a_2 helyére előbb x_1, y_1 -et, azután x_2, y_2 -t és adjuk össze a két egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} & \left[(x_1^r + y_1^r)^{1/r} + (x_2^r + y_2^r)^{1/r}\right] [(x_1 + x_2)^r + (y_1 + y_2)^r]^{1-1/r} \geq \\ & \geq (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^{r-1} + (y_1 + y_2)(y_1 + y_2)^{r-1} = \\ & = (x_1 + x_2)^r + (y_1 + y_2)^r. \end{aligned}$$

A baloldal második tényezőjével, mely pozitív átosztva és osztva még $2 \cdot 2^{1/r}$ -vel az

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_1^r + y_1^r}{2}\right)^{1/r} + \left(\frac{x_2^r + y_2^r}{2}\right)^{1/r} \right] \geq \left[\frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^r + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^r}{2} \right]^{1/r}$$

⁸ Ezzel megoldását adtuk a 390. feladatnak.

⁹ Ezzel megoldását adtuk a 391. feladatnak.

egyenlőtlenséghez jutunk. Egyenlőség áll, ha $\frac{x_1}{x_1 + x_2} = \frac{x_1}{y_1 + y_2}$ és $\frac{x_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_2}{y_1 + y_2}$, azaz, ha $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$. Ez az $\left(\frac{x^r + y^r}{2}\right)^{1/r}$ függvény tágabb értelemben konvex voltát fejezi ki. Ha eljárásunkat nem a kéttagú, hanem a k tagú Hölder-egyenlőtlenségre alkalmazzuk, akkor ugyanúgy az

$$\left(\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_k^r}{k}\right)^{1/r}$$

tágabb értelemben konvex voltát kifejező egyenlőtlenséghez jutunk.¹⁰

Írjuk fel utóbbi függvényre a kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget, a két „helyet”, ahol a függvény értékét vesszük $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ -val és $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ -val jelölve:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)^r + \left(\frac{a_2 + b_2}{2}\right)^r + \dots + \left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)^r}{k} \right]^{1/r} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_k^r}{k}\right)^{1/r} + \left(\frac{b_1^r + b_2^r + \dots + b_k^r}{k}\right)^{1/r} \right]. \end{aligned}$$

$2 \cdot k^{1/r}$ -nel átszorozva az

$$\begin{aligned} & [(a_1 + b_1)^r + (a_2 + b_2)^r + \dots + (a_k + b_k)^r]^{1/r} \leq \\ & \leq (a_1^r + a_2^r + \dots + a_k^r)^{1/r} + (b_1^r + b_2^r + \dots + b_k^r)^{1/r} \end{aligned}$$

ú. n. Minkowski-féle egyenlőtlenséghez jutunk.¹¹

¹⁰ Ezzel megoldását adtuk a 392. feladatnak.

¹¹ Ezzel megoldását adtuk a 393. feladatnak.