

17. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$.

Megoldás: Igazoljuk állításunkat teljes indukcióval. Az egyenlőtlenségben ha $n = 1$ az egyenlőség áll. $\binom{2}{1} = \frac{4}{2}$. Tegyük fel, hogy valamilyen k értékre már igazoltuk az állítást. Vizsgáljuk meg a következő együtthatót:

$$\binom{2(k+1)}{k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} \binom{2k}{k} = \frac{2 \cdot (2k+1)}{k+1} \binom{2k}{k} = 4 \frac{(2k+1)}{2(k+1)} \binom{2k}{k} > 4 \cdot \frac{2k}{2(k+1)} \cdot \binom{2k}{k}.$$

Így az indukciós feltevés szerint

$$\binom{2(k+1)}{k+1} > 4 \cdot \frac{2k}{2(k+1)} \binom{2k}{k} \geq 4 \cdot \frac{2k}{2(k+1)} \cdot \frac{4^k}{2k} = \frac{4^{k+1}}{2(k+1)},$$

tehát $k+1$ -re is igaz az állítás. Ezzel bizonyítottuk, hogy n mindne értékére igaz. ¹

Megoldotta: László Z.

18. Tegyük fel ismét, hogy $n \geq 100$ és hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $2^{\sqrt{2n}} \leq (2n)^{\frac{3}{2}}$ kellene legyen.

Megoldás: A 16. és 17. feladatból következik, hogy

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{\sqrt{2n}-1} \cdot 4^{\frac{2n}{3}}, \quad \text{ha } n \geq 100.$$

$2n \cdot 4^{-\frac{2n}{3}}$ -nal szorozva:

$$4^{\frac{n}{3}} = 2^{\frac{2n}{3}} \leq (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}}.$$

$\frac{3}{\sqrt{2n}}$ -edik hatványra emelve:

$$2^{\sqrt{2n}} \leq (2n)^{\frac{3}{2}}.$$

Megoldotta: László Z.

19. Mutassuk meg, hogy:

- a) ha $u \geq 4$ és u egész szám, akkor $2^u \geq 3(u+1)$,
- b) ha $u \geq 4$, akkor $2^u > 3u$ (akár egész szám az u , akár nem),
- c) ha $u \geq 12$, akkor (megint, akár egész szám az u , akár nem), $2^u \geq u^3$.

Megoldás: a) Az egyenlőtlenséget teljes indukcióval fogjuk bizonyítani: $u = 4$ esetében $2^4 = 16 > 3(4+1) = 15$. Tegyük fel, hogy $u = n$ esetében igaz. Ekkor $2^{n+1} = 2^n + 2^n > 3(n+1) + 3(n+1) \geq 3(n+1) + 3 = 3[(n+1)+1]$.

Tehát igaz $u = n+1$ esetében is.

b) Az éppen bebizonyított egyenlőtlenség szerint, ha $u \geq 4$

$$2^u \geq 2^{[u]} > 3([u]+1) > 3u.$$

c) Írjuk u -t 2^x alakban, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség akkor igaz, ha

$$2^{2^x} > 2^{3x}, \quad \text{vagyis ha } 2^x > 3x,$$

ami b) szerint $x \geq 4$, tehát $u = 2^4 = 16$ -ra teljesül. $u = 12, 13, 14, 15$ -re könnyű látni, hogy

$$2^u > (u+1)^3,$$

s így már $u \geq 12$ -re igaz, hogy

$$2^u \geq 2^{[u]} > ([u]+1)^3 > u^3.$$

Megoldotta: László Z.

20. Mutassuk meg, hogy $n \geq 100$ esetén a 18. feladatban szereplő egyenlőtlenség nem állhat.

Megoldás: 19. c) feladat egyenlőtlenségéből $u = \sqrt{2n} > \sqrt{200} > 14$ helyettesítésével azt nyerjük, hogy

$$2^{\sqrt{2n}} > (\sqrt{2n})^3 = (2n)^{\frac{3}{2}}.$$

Megoldotta: László Z.

¹ A binomiális tételen keresztül $4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n}$ kifejezésből nyerhetünk egy második megoldást.

21. Mutassuk meg, hogy n és $2n$ között ($2n$ -et beleértve) mindig van prímszám; azaz: bizonyítsuk be Csebysev tételét.

Megoldás: A 20. feladat állítása éppen azt tartalmazza, hogy ha Csebysev tétele nem volna igaz $n \geq 100$ esetében, abból ellentmondás következne. $n \geq 100$ -ra tehát igaznak kell lennie a tételnek. -tól 100-ig egyszerűen próbálgatással győződhetünk meg a tétel helyességéről.

1 és 2 között van (a felső határt is beleértve) a 2; 2 és 4 közt a 3; $n = 3, 4$ -re n és $2n$ közt van az 5; $n = 5, 6$ -ra a 7; $n = 7$ -től 12-ig a 13; $n = 13$ -tól a 22-ig a 23; 23-tól 42-ig a 43; 43-tól 82-ig a 83; végül $n = 83$ -tól 100-ig n és $2n$ közt van pl. a 101 törzsszám. Így a tétel $n = 1$ -től 100-ig is fennáll, s így megmutattuk, hogy minden n -re igaz.

Megoldotta: László Z.