

1. Mely számtól kezdve lesz

$$\pi(x) \leq \frac{x}{3}?$$

Megoldás: Annak megmutatásához, hogy $\pi(x) \leq \frac{x}{2}$ azt használtuk fel, hogy két egymás után következő szám közül az egyik páros, tehát, ha 2-nél nagyobb, akkor nem lehet prímszám. Annak megmutatásához, hogy valahonnan kezdve $\pi(x) \leq \frac{x}{3}$ vegyük igénybe a 3-mal osztható számokat is. Ha három egymás utáni számot veszünk, ezek egyike osztható 3-mal és legalább egy páros, de, ha csak három számot vizsgálunk, akkor nem mondhatjuk, hogy ezek kétharmada összetett, mert lehet, hogy a középső osztható 2-vel és hárommal is, azaz 6-tal a másik kettő megprím, mint például 41, 42, 43. Jobb lesz azért $2 \cdot 3$, azaz hat számot vennünk. Ezek közül egy mindig osztható 6-tal, még további kettő lesz páros, és még egy osztható 3-mal. Így tehát 6 szám közül legfeljebb 2 lehet prímszám, ha az első szám legalább 4 (azaz a számoknak legfeljebb $1/3$ -a):

$$\pi(x+6) \leq \pi(x) + 2, \quad \text{ha } x > 3.$$

Tegyük fel most, hogy létezik egy olyan x , melyre $\pi(x) \leq \frac{x}{3}$, akkor előbbi eredményünkből

$$\pi(x+6) \leq \pi(x) + 2 \leq \frac{x}{3} + 2 = \frac{x+6}{3},$$

vagyis, ha a tétel igaz x -re, igaz $x+6$ -ra is. 6 egymás utáni számot kell tehát keresnünk, melyekre a tétel igaz, akkor tudjuk, hogy onnan minden x -re igaz. 30 az első olyan szám, amire a tétel igaz, mert $\pi(30) = 10 = \frac{30}{3}$. 31 és 32-re ismét nem igaz. $\pi(33) = 11 = \frac{33}{3}$, $\pi(34) = 11 < \frac{34}{3}$, $\pi(35) = 11 < \frac{35}{3}$, $\pi(36) = 11 < \frac{36}{3}$, $\pi(37) = 12 < \frac{37}{3}$, $\pi(38) = 12 < \frac{38}{3}$.

Tehát $\pi(x) \leq \frac{x}{3}$, midőn $x \geq 33$.

2. Keressétek az $ax + by = c$ elsőfokú határozatlan egyenletnek egész x, y megoldását, ha a, b, c egész számok.

3. Hogyan lehet az előbbi egyenlet összes megoldásait előállítani? Mi a feltétele annak, hogy legyen ilyen megoldás?

Megoldás: 2. Először is, nyilvánvaló, hogy c -nek oszthatónak kell lennie $(a, b) = d$ -vel, mert a is osztható vele, b is, tehát ha x és y bármilyen egész számok, az $ax + by$ összegből mindig kiemelhető a d közös tényező. Azonban ez a feltétel elegendő is. Tudjuk ugyanis, hogy a és b legnagyobb közös osztója előállítható a következő alakban: $d = (a, b) = a\xi + b\eta$, ahol ξ és η valamilyen egész szám. Mivel $c = dc_1$, ezt az egyenletet c_1 -gyel szorozva:

$$a\xi c_1 + b\eta c_1 = dc_1 = c$$

és így $c_1\xi$ és $c_1\eta$ kielégítik a megoldandó egyenletet.

3. Feltehetjük, hogy a és b relatív prímekek, mert, ha nem volnának azok, végigoszthatunk legnagyobb közös osztó-jukkal, lévén evvel c is osztható. Legyen x_0 , és y_0 , az egyenletnek megoldása, akkor $ax_0 + by_0 = c$ és tegyük fel, hogy x és y is kielégítik az egyenletet, azaz $ax + by = c$. A két egyenlet jobb oldala egyenlő lévén, baloldaluk is egyenlő:

$$ax_0 + by_0 = ax + by,$$

vagyis

$$a(x_0 - x) = b(y - y_0).$$

Mivel a és b relatív prímekek, kell, hogy pl. $(y - y_0)$ osztható legyen a -val $(y - y_0) = at$, ebből következik, hogy $x_0 - x = bt$ és így $y = y_0 + at$ és $x = x_0 - bt$ alakban írhatók az egyenlet összes gyökei. Fordítva bebetegyetéssel meggyőződhetünk, hogy minden ilyen alakú számpár megoldása az egyenletnek, tehát $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$, ahol $t = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, az egyenlet összes megoldásait szolgáltatja.

4. Számítsuk ki az $x^2 + x + 41$ kifejezés értékét különböző egész helyeken és bontsuk törzstényezőkre. Igaz-e, hogy a kifejezés minden egész x -re törzsszámot állít elő?

5. Bizonyítsuk be, hogy egy egyváltozós polinom, akárhányszor fokú, nem állíthat elő a változó minden egész értékére prímszámot.

Megoldás: 4. Ennek a függvénynek az az érdekessége, hogy igen sok számra, köztük a 0-tól 40-ig, és -40 -ig terjedőkre prímszámot állít elő. Mégis könnyen belátható, hogy a második kérdésre tagadó a válasz. Például az $x = 41$ helyen a függvény értéke $41^2 + 41 + 41 = 43 \cdot 41$ nem prímszám.

5. Hasonlóan találhatunk minden polinomhoz olyan egész helyet, ahol összetett szám az értéke. Jelöljük a polinomot $f(x)$ -szel.

Ha $f(x)$ -nek nincs állandó tagja, akkor az x minden tagból kiemelhető, így a polinom mindig osztható x -szel. Az x kiemelése után maradó polinom értéke viszont nem lehet minden egész helyen 1, mert ha $g(x)$ egy ilyen polinom

volna, akkor a $g(x) - 1 = 0$ algebrai egyenletnek végtelen sok gyöke volna, de egy egyenletnek nem lehet több gyöke, mint ahányad fokú.

Ha a polinomnak van állandó tagja, és az nem 1, ezt jelöljük c -vel. A többi tagból kiemelhető x , s így a polinom így írható: $f(x) = xg(x) + c$. Így $f(cy) = c[yg(cy) + 1]$. A zárójelben levő polinom értéke pedig nem lehet minden egész y -ra 1.

Ha az állandó tag 1, akkor először keressünk egy olyan a helyet, ahol $f(a)$ se nem 0 se nem 1. Ilyen hely biztosan van, mert az $f(x) = 0$ és $f(x) = 1$ egyenleteknek összesen is csak véges számú megoldása lehet. x helyett $y + a$ -t írva és a hatványozásokat elvégezve y -nak egy polinomját kapjuk: $g(y) = f(a + y)$. Ennek az állandó tagja ugyanaz, mint a 0 helyen való értéke: $g(0) = f(a)$, ami se nem 0 se nem 1. Így a $g(y)$ polinomra már alkalmazhatjuk az előbbi megfontolást, tehát van egy olyan y_0 hely, ahol $g(y_0) = f(y_0 + a)$ összetett szám.

6. *Adva vannak a térben egyenesek, melyek páronként metszik egymást, de semelyik három nem fekszik egy síkban. Bizonyítsuk be, hogy az összes egyenesek egy ponton mennek keresztül.*

Megoldás: A tétel bizonyítása ugyanúgy történhetik, mint a cikkben a hasonló síkbeli hamis bizonyítás, csak most három egyenes esetén is igaz a tétel s így már helyes bizonyítást kapunk.

Két egyenes esetén az állítás a feltételekben már benne foglaltatik. Egy harmadik egyenes nem metszheti az első kettőt azok metszéspontjától különböző pontban, mert akkor benne fekédné azok síkjában. Így három egyenes esetére is igaz a tétel.

Tegyük fel, hogy bebizonyítottuk már a tételt k számú és $k - 1$ számú egyenes esetére is ($k \geq 3$) Megmutatjuk, hogy akkor igaz $k + 1$ olyan egyenesre is, melyek eleget tesznek a feltételnek. Ha egy egyenest elveszünk a maradék k az indukciós feltevés szerint tudjuk, hogy egy ponton megy keresztül. Jelöljük az elvett egyenest a -val. Vegyünk el helyette most egy másik b egyenest. Ismét k egyenes marad. Ezek tehát szintén egy ponton mennek keresztül. Az első ponton átmegy b is, a másikon a is. Így azt kell még belátni, hogy ez a két pont azonos. Vegyük el most a -t is b -t is. A maradék $k - 1$ egyenesre is igaz a tétel az indukciós feltevés szerint, tehát kell, hogy ezek is egy ponton menjenek keresztül és ez egy meghatározott pont ($k - 1$, tehát legalább 2 különböző egyenesről van szó, ezeknek pedig nem lehet 1-nél több közös pontjuk). Ezen a ponton kell tehát a -nak és b -nek is átmennie, azaz mind a $k + 1$ egyenesnek.

Mivel két kezdő értékre, 2-re és 3-ra a tétel igaz, így most már következik, hogy igaz akárhány egyenesre.

7. *Mutassuk meg, hogy*

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{1 + a_1} + \frac{a_2}{(1 + a_1)(1 + a_2)} + \dots + \\ & + \frac{a_n}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)} = \\ & = 1 - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)}. \end{aligned}$$

I. megoldás: Jelöljük a baloldali összeget S_n -nel. Teljes indukcióval következőképpen bizonyítható az állítás. Nézzük meg, igaz-e a tétel $n = 1$ -re. Ekkor $S_1 = \frac{a_1}{1 + a_1}$. A jobboldalon $1 - \frac{1}{1 + a_1} = \frac{1 + a_1 - 1}{1 + a_1} = \frac{a_1}{1 + a_1}$ van, tehát $n = 1$ -re a tétel igaz.

Tegyük fel most, hogy a tétel igaz valamilyen $n = k$ -ra, azaz

$$S_k = 1 - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)}.$$

Adjuk mindkét oldalhoz hozzá a $k + 1$ -edik tagot:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{a_{k+1}}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1})} = \\ &= 1 - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)} + \\ &+ \frac{a_{k+1}}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1})} = \\ &= 1 - \left[\frac{1 + a_{k+1}}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{k+1}}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1})} \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)(1 + a_{k+1})}, \end{aligned}$$

és így a tétel igaz $n = (k + 1)$ -re is. Ezzel megmutattuk, hogy a tétel igaz minden n -re.

II. megoldás: A teljes indukciós megoldás nem mutatja meg azonban, miért igaz a tétel. Ennek okát a következőképpen láthatjuk.

A sorozat k -adik tagját így lehet felírni:

$$\begin{aligned} & \frac{a_k}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{k-1})(1 + a_k)} = \\ &= \frac{(1 + a_k) - 1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{k-1})(1 + a_k)} = \\ &= \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{k-1})} - \\ & - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{k-1})(1 + a_k)}, \end{aligned}$$

és így

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{1 + a_1}\right) + \left(\frac{1}{1 + a_1} - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)} - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{k-1})} - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k)} - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{k+1})}\right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{n-2})} - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{n-1})}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{n-1})} - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)}. \end{aligned}$$

8. *Mutassuk meg hogy:*

$$\sin \alpha + \sin 2 \alpha + \dots + \sin n \alpha = \frac{\sin \frac{n \alpha}{2} \sin \frac{(n + 1) \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

I. megoldás: Jelöljük a baloldali összeget S_n -nel. Ha $n = 1$, a jobboldalon

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha = S_1$$

áll. Tegyük fel most, hogy a tétel igaz $n = (k - 1)$ -re, vagyis

$$S_{k-1} = \frac{\sin \frac{(k-1)\alpha}{2} \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $\sin k\alpha$ -t.

$$\begin{aligned}
 S_k &= S_{k-1} + \sin k\alpha = \frac{\sin \frac{(k-1)\alpha}{2} \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \sin 2\frac{k\alpha}{2} = \\
 &= \frac{\sin \frac{(k-1)\alpha}{2} \sin \frac{k\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{k\alpha}{2} \cos \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{\sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left(\sin \frac{(k-1)\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{k\alpha}{2} \right) = \\
 &= \frac{\sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[\sin \frac{(k-1)\alpha}{2} + \left(\sin \frac{(k+1)\alpha}{2} - \sin \frac{(k-1)\alpha}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{\sin \frac{k\alpha}{2} \sin \frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},
 \end{aligned}$$

és így a tétel igaz $n = k$ -ra is. Ezzel megmutattuk, hogy a tétel igaz minden n -re.

II. megoldás: A jobboldal mutatja, hogy $S_n \sin \frac{\alpha}{2}$ -et lesz célszerű megpróbálni átalakítani:

$$S_n \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \sin 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \dots + \sin n\alpha \sin \frac{\alpha}{2},$$

de

$$\sin k\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(2k-1)\alpha}{2} - \cos \frac{(2k+1)\alpha}{2} \right)$$

és így

$$\begin{aligned}
 S_n \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \right) + \left(\cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2} \right) + \right. \\
 &+ \left(\cos \frac{5\alpha}{2} - \cos \frac{7\alpha}{2} \right) + \dots + \left(\cos \frac{(2n-3)\alpha}{2} - \cos \frac{(2n-1)\alpha}{2} \right) + \\
 &\quad \left. + \left(\cos \frac{(2n-1)\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2} \right) = \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2},
 \end{aligned}$$

vagyis

$$S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$