

I. rész

1. A karát egy viszonyszám, amely megmutatja, hogy mekkora az aranyötvözetben az arany tömegaránya.

a) Hány gramm ezüstöt tartalmaz egy 10 karátos 0,06 kg tömegű nyaklánc, amely csak aranyat és ezüstöt tartalmaz, ha a színarany 24 karátos?

(2 pont)

b) Hány gramm aranyat olvasson a nyakláncához az ötvös, ha 18 karátos ötvözetet szeretne létrehozni?

(4 pont)

c) Az ötvösmester pontosan 25 éve hordja az egyik aranygyűrűjét, és megállapította, hogy időközben a gyűrű aranytartalmának tömege 0,012 milligrammally csökkent. Számítsuk ki, hogy naponta hány aranyatom vált le a gyűrűről, ha 197 gramm arany hozzávetőlegesen $6 \cdot 10^{23}$ darab aranyatomot tartalmaz. (Feltételezzük, hogy a kopás egyenletesen ment végbe, és tudjuk, hogy ezen időszakban 5 szökőév volt.)

(6 pont)

Megoldás. a) A tizkarátos ötvözet tömegének $\frac{10}{24}$ része arany, $\frac{14}{24}$ része ezüst, tehát a nyaklánc ezüsttartalma $60 \cdot \frac{14}{24} = 35$ gramm.

b) 1. megoldás. Ha x gramm aranyat olvasztunk hozzá, akkor a teljes tömeg $60 + x$ gramm, az arany tömege pedig $25 + x$ grammra nő, amely az össztömeg $\frac{18}{24}$ része. Ezek alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$(60 + x) \cdot \frac{18}{24} = 25 + x.$$

Rendezés és ekvivalens átalakítások után $x = 80$, az ötvösnek 80 g aranyat kell hozzáolvasztani a nyakláncához.

2. megoldás. Ha aranyat olvasztunk hozzá, akkor az ezüsttartalom tömege változatlanul 35 g. 18 karátos ötvözet esetén ez a teljes tömeg $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ része, tehát az ötvözet tömege $35 \cdot 4 = 140$ g. Eredetileg 60 g volt, így $140 - 60 = 80$ gramm aranyat kell hozzáolvasztani.

c) Az adott időszakban 20 szokásos és 5 szökőév volt, így összesen $20 \cdot 365 + 5 \cdot 366 = 9130$ nap telt el.

Összesen a gyűrűről

$$\frac{0,012 \cdot 10^{-3}}{197} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 3,65 \cdot 10^{16}$$

darab aranyatom vált le, amelyet a napok számával elosztva megkapjuk, hogy egyenletes kopás esetén naponta $4 \cdot 10^{12}$ (négyezer-milliárd, azaz négybillió) darab aranyatom távozott az ékszerről.

2. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza egyenlő a másik két oldalhossz számtani közepével, kerülete 276 egység.

a) Mekkora a háromszög köréírt körének a területe?

(8 pont)

b) Mekkora a háromszög beírt körének a kerülete?

(4 pont)

Megoldás. a) A derékszögű háromszög nem egyenlő szárú, mert akkor a két befogó ugyanolyan hosszú lenne, így nem teljesülne a feladat első feltétele. Ekkor a két befogó hosszát a -val, illetve b -vel, az átfogó hosszát c -vel jelölve, feltehetjük, hogy $0 < a < b < c$. Az első feltétel alapján felírhatjuk a következő egyenletet: $b = \frac{a+c}{2}$, amelyből $2b = a + c$.

A háromszög kerülete: $K = a + b + c = 276$, amelybe $a + c$ helyére $(2b)$ -t helyettesítve azt kapjuk, hogy $3b = 276$, azaz $b = 92$ egység. $a + c = 2b$ alapján $a + c = 184$, amelyből kifejezzük az egyik ismeretlent: $a = 184 - c$.

Pitagorasz tétele alapján felírhatjuk az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenletet, amelybe a fentieket behelyettesítve: $(184 - c)^2 + 92^2 = c^2$, majd a zárójelet felbontva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$c = \frac{184^2 + 92^2}{368} = 115 \text{ egység.}$$

A köréírt kör sugarának hossza $R = \frac{c}{2} = 57,5$ egység.

A háromszög köréírható körének területe: $T_{\text{kör}} = R^2 \pi = 57,5^2 \cdot \pi \approx 10386,9$ területegység.

b) 1. megoldás. A háromszög területe: $T = \frac{ab}{2} = 3174$ területegység, félkerülete $s = \frac{K}{2} = 138$ egység.

Most a háromszög területére vonatkozó $T = r \cdot s$ képletből kifejezzük a háromszögbe írt kör sugarának hosszát:

$$r = \frac{T}{s} = \frac{3174}{138} = 23 \text{ egység.}$$

A háromszög beírt körének sugara 23 egység hosszúságú. A beírt kör kerülete: $K_{\text{kör}} = 2r\pi = 46\pi$ egység $\approx 144,5$ egység.

2. megoldás. Ismert, hogy a derékszögű háromszögbe írható kör sugarának hossza kiszámítható a háromszög oldalhosszainak segítségével a következőképpen:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{69 + 92 - 115}{2} = 23 \text{ egység.}$$

A beírt kör kerülete: $K_{\text{kör}} = 2r\pi = 46\pi \approx 144,5$ egység.

3. a) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek négyzete osztható 504-gyel?

(3 pont)

b) Az első 504 természetes szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyszerre négy különböző számot. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább az egyik nagyobb 400-nál?

(5 pont)

c) Melyik számrendszerben írtuk fel a háromjegyű 352 számot, ha értéke egyenlő lett a hatos számrendszerben felírt 504 értékével?

(6 pont)

Megoldás. a) A szám prímtényezősz felbontása: $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, amelyben szerepelnek páratlan kitevők, így ez nem négyzetszám. A páratlan kitevőket a náluk nagyobb páros számok közül a legkisebbre cserélve olyan négyzetszámot kapunk, amely osztható 504-gyel, és az ilyen négyzetszámok közül a legkisebb: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Ez a szám a $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ négyzete.

Megmutattuk, hogy a 84 a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelynek négyzete osztható 504-gyel.

b) 504 különböző elemből kiválasztunk egyszerre négyet, így összesen $\binom{504}{4}$ eset van.

Az első természetes számnak a nullát tekintve, az ötszáznegyedik természetes szám az 503 lesz. Ezek közül 103 darab szám nagyobb, 401 darab szám pedig nem nagyobb 400-nál. Számítsuk ki a komplementer esemény bekövetkezésének valószínűségét! Ez azt jelenti, hogy a kiválasztott számok egyike sem nagyobb 400-nál, azaz mind a négy kisebb vagy egyenlő, mint 400, így az esetek száma $\binom{401}{4}$. Ekkor

$$p' = \frac{\binom{401}{4}}{\binom{504}{4}} \approx 0,4,$$

ami a komplementer eseményre vonatkozik.

A keresett valószínűség: $p = 1 - p' = 0,6$.

c) A feladat feltételei alapján felírhatjuk a következő egyenletet: $352_x = 504_6$, ahol $x > 5$ egész szám.

Az egyenlet mindkét oldalán a helyiértékek segítségével felírjuk a számjegyek valódi értékét, melyek összege az adott szám értékével egyenlő: $3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0 = 5 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0$, amelyből a kijelölt műveletek elvégzése, majd rendezés után a $3x^2 + 5x - 182 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Ennek gyökei $x_1 = 7$, illetve $x_2 = -\frac{26}{3}$, ezek közül csak az első megoldás elégíti ki a feltételeket, tehát a kérdéses számot a hetes számrendszerben írtuk fel.

4. A KöMaL Facebook oldalán minden bejegyzésnél pontosan 2 vagy pontosan 3 (különböző) szerepel az előre meghatározott 10-féle hashtagból, melyek között megtalálható a #ankét és a #kömalpóló is. Az adminisztrátorok megállapodtak, hogy amennyiben egy bejegyzésnél szerepel a #ankét, akkor szerepel a #kömalpóló is.

a) Hány poszt jelenhet meg októberben úgy, hogy bármely kettőben különbözőn a hashtagok halmaza, ha összesen minden posztban szerepel a #kömalpóló?

(3 pont)

b) Az adminisztrátorok eredeti megállapodásának betartásával hány poszt jelenhet meg úgy, hogy bármely kettőben különbözőn a hashtagok halmaza, ha más megállapodás nincs?

(4 pont)

c) A két adminisztrátort megkérdezték, hogy összesen hányan kedvelték a szeptemberi bejegyzéseket. Az egyik így válaszolt: „Minden szeptemberi bejegyzést ugyanannyian lájkoltak. Ha 2-vel kevesebb bejegyzés lett volna és mindegyiket 42-vel többen kedvelték volna, akkor 744-gyel több lájkot gyűjtöttünk volna.” A másik adminisztrátor válasza így hangzott: „Ha 3-mal többször posztoltunk volna, de mindegyiket félszázzal kevesebben kedvelték volna, akkor 976-tal kevesebb lájkunk lett volna.” Összesen hány lájkot gyűjtöttek szeptemberben?

(6 pont)

Megoldás. a) A #kömalpóló mellé a másik 9 darab hashtagból kell választani még egyet, illetve kettőt, így összesen $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 9 + 36 = 45$ különböző eset van, így legfeljebb 45 poszt jelenhet meg októberben, amely megfelel a feltételeknek.

b) 1. eset. Ha szerepel a #ankét, akkor a #kömalpóló is ott van, ezért a maradék 8 hashtagból már nem kell egy sem, vagy egy kell közülük, így ekkor $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} = 1 + 8 = 9$ különböző eset van.

2. eset. Ha nem szerepel a #ankét, akkor a másik 9 darab hashtagból kell mindkettőt, illetve mindhármat kiválasztani, ezért ekkor $\binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = 120$ különböző eset van.

Összesen $9 + 120 = 129$ poszt jelenhet meg úgy, hogy bármely kettőben különbözzön a hashtagek halmaza, ha más megállapodás nincs.

c) A szeptemberi bejegyzések számát x -szel, az egy-egy bejegyzést kedvelők számát y -nal jelölve, a szeptemberi kedvelések száma összesen $x \cdot y$, ekkor a feladatban megadott adatok alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}(x - 2)(y + 42) &= x \cdot y + 744, \\(x + 3)(y - 50) &= x \cdot y - 976,\end{aligned}$$

amelyből a műveletek elvégzése és rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}42x - 2y &= 828, \\-50x + 3y &= -826.\end{aligned}$$

Ezt többféleképpen megoldhatjuk, például az egyenlő együtthatók módszerével úgy, hogy az első egyenletet 3-mal, a másodikat 2-vel megszorozzuk, majd a kapott egyenleteket összeadva a $26x = 832$ egyenlethez jutunk. Ebből $x = 32$, amelyet behelyettesítve az eredeti egyenletek bármelyikébe, kiszámoljuk, hogy $y = 258$.

Szeptemberben összesen $32 \cdot 258 = 8256$ lájkot kaptak.

Ellenőrzés: Ha $32 - 2 = 30$ bejegyzés lett volna, és minden bejegyzésre $258 + 42 = 300$ kedvelés érkezett volna, akkor $30 \cdot 300 = 9000$ lájk gyűlt volna össze, ami valóban 744-gyel több, mint a 8256.

Ha pedig $32 + 3 = 35$ bejegyzés lett volna, és mindegyiket $258 - 50 = 208$ fő lájkolta volna, akkor $35 \cdot 208 = 7280$ lájk jött volna összesen, ami tényleg 976-tal kevesebb, mint a 8256.

II. rész

5. Adott a k kör, amelynek egyenlete $x^2 + y^2 = 20x - 21y$ és a $P\left(-\frac{1}{2}; p\right)$ pont, ahol p valós paraméter.

a) Határozzuk meg a p valós paraméter összes értékét, amelyre P a k körön kívül helyezkedik el.

(5 pont)

Legyen az AB szakasz a k kör azon átmérője, amelyre illeszkedik a $Q(5; -5,25)$ pont.

b) Számítsuk ki az A és a B pont koordinátáit!

(5 pont)

A k körön belül véletlenszerűen rábökünk egy pontra.

c) Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott pont nincs messzebb a k kör középpontjától, mint a Q pont!

(6 pont)

Megoldás. a) Az egyenlet valóban egy kör egyenlete. Ezt az egyenlet teljes négyzetté alakításával igazolhatjuk:

$$(x - 10)^2 + \left(y + \frac{21}{2}\right)^2 = \frac{841}{4}.$$

A P pont akkor és csak akkor van a körön kívül, ha a kör középpontjától mért távolsága nagyobb, mint a kör sugara, azaz koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(x - 10)^2 + \left(y + \frac{21}{2}\right)^2 > \frac{841}{4}.$$

Ezt átrendezve az $x^2 + y^2 > 20x - 21y$ egyenlőtlenséghez jutunk.

A P pont koordinátáit behelyettesítjük az egyenlőtlenség megfelelő változóinak helyére:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + p^2 > 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 21p,$$

majd elvégezzük a kijelölt műveleteket és nullára redukálunk:

$$p^2 + 21p + \frac{41}{4} > 0.$$

A kapott egyenlőtlenség megoldása: $p < -\frac{41}{2}$ vagy $p > -\frac{1}{2}$, ezen értékek megfelelnek a feltételeknek, így a megoldáshalmaz a következő:

$$p \in \left] -\infty; -\frac{41}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}; \infty \right[.$$

b) A kör középpontja illeszkedik az átmérőre, ezért a kör középponti egyenletéből kiolvassuk a K középpont koordinátáit és a sugár hosszát: $K(10; -\frac{21}{2})$,

$$r = \sqrt{\frac{841}{4}} = \frac{29}{2} \text{ egység.}$$

Az AB átmérőre illeszkedik a Q és a K pont is, így egyenesének egyenlete felírható a két pont koordinátáinak segítségével:

$$d: (10 - 5)(y - (-5,25)) = (-10,5 - (-5,25))(x - 5),$$

amelyből ekvivalens átalakítások után a $d: y = -\frac{21}{20}x$ egyenletet kapjuk.

Az A és a B pont egyaránt illeszkedik a k körre és a d egyenesre, így koordinátáikat az alábbi egyenletrendszer megoldásaiként kapjuk meg:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20x - 21y, \\ y &= -\frac{21}{20}x. \end{aligned}$$

Az első egyenletben y helyett $(-\frac{21}{20}x)$ -et írva, majd rendezve, a

$$\frac{841}{400}x^2 - \frac{841}{20}x = 0$$

hiányos másodfokú egyenlethez jutunk, amelyet szorzattá alakítva az $x_1 = 0$ és $x_2 = 20$ gyököket kapjuk.

A kapott értékeket visszahelyettesítve a második egyenletbe: $y_1 = 0$ és $y_2 = 21$, így a keresett két pont az $A(0; 0)$ és a $B(20; -21)$.

c) A keresett valószínűség megegyezik a K középpontú, KQ sugarú kör területének és a k kör területének hányadosával, ami éppen a megfelelő sugárhosszak arányának négyzetével egyenlő: $r_k = 14,5$ egység, $|KQ| = \sqrt{5^2 + 5,25^2} = 7,25$ egység,

$$p = \left(\frac{7,25}{14,5}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

6. Nevesincs szigeten felmérést végeztek az idén érettségiző 152 diák megkérdezésével. Az első kérdés arra vonatkozott, hogy ki hány tárgyból vizsgázik közép-, illetve emelt szinten. A válaszokat az alábbi táblázat mutatja:

		középszintű vizsgák száma					
		0	1	2	3	4	5
emelt szintű vizsgák száma	0	0	8	3	5	2	25
	1	1	2	3	10	20	2
	2	3	4	7	22	6	0
	3	1	3	10	8	1	0
	4	0	1	2	1	0	0
	5	2	0	0	0	0	0

Például 20 olyan diák van, aki 4 tárgyból középszintű, 1 tárgyból pedig emelt szintű vizsgára jelentkezett, ugyanakkor 5 tanuló 3 tárgyból középszinten vizsgázik, emelt szintű vizsgát pedig idén nem tesz.

a) Összesen hány emelt szintű vizsgát terveznek a diákok?

(3 pont)

b) Hányan érettségiznek pontosan 5 tárgyból?

(3 pont)

c) Határozzuk meg a legfeljebb 4 tárgyból vizsgázók között a középszintű vizsgák számának leggyakoribb értékét, illetve mediánját!

(5 pont)

d) Számítsuk ki az egy főre jutó átlagos vizsgaszámot!

(5 pont)

Megoldás. a) Az emelt szintű vizsgák száma:

$$0 \cdot (8 + 3 + 5 + 2 + 25) + 1 \cdot (1 + 2 + 3 + 10 + 20 + 2) + 2 \cdot (3 + 4 + 7 + 22 + 6) + 3 \cdot (1 + 3 + 10 + 8 + 1) + 4 \cdot (1 + 2 + 1) + 5 \cdot 2 = 0 + 38 + 84 + 69 + 16 + 10 = 217 \text{ darab.}$$

b) Pontosan 5 tárgyból vizsgázik, aki

- 5 középszintű vizsgát tesz, és nem vizsgázik emelt szinten (a táblázat utolsó oszlopának a legfelső sorában szerepel): 25 fő,
- 4 középszintű és 1 emelt szintű vizsgát tesz (utolsó előtti oszlop második sorában): 20 fő,
- 3 középszintű és 2 emelt szintű vizsgát tesz (negyedik oszlop harmadik sorában): 22 fő,
- 2 középszintű és 3 emelt szintű vizsgát tesz (harmadik oszlop negyedik sorában): 10 fő,
- 1 középszintű és 4 emelt szintű vizsgát tesz (második oszlop ötödik sorában): 1 fő,
- 5 emelt szintű vizsgát tesz, és nem tesz középszintű érettségét (első oszlop utolsó sorában): 2 fő.

Összesen: 80 fő tesz pontosan öt tárgyból érettségét idén.

c) A legfeljebb négy tantárgyból vizsgázók a táblázatban éppen a b) részben szereplő (pontosan 5 tantárgyból vizsgázók) fölött vannak, tehát az 1. oszlop felső 5 sorában, a 2. oszlop felső 4 sorában, és így tovább, mindig 1-gyel kevesebb sorban, amíg eljutunk az utolsó oszlopba, ahol nincs ilyen tanuló. Oszloponként összeadva a létszámot, megkapjuk, hogy középszinten hányan tesznek egy adott számú vizsgát. Táblázatba foglalva:

középszintű vizsgák száma	0	1	2	3	4
vizsgázók száma (a legfeljebb 4 tárgyból vizsgázók közül)	5	17	13	15	2

Az így kapott adathalmaz módusza az 1, mediánja pedig a 2, tehát a legfeljebb 4 tárgyból vizsgázók között a középszintű vizsgák számának leggyakoribb értéke az 1 (darab) vizsga, mediánja pedig a 2 (darab) vizsga.

d) Az egy főre jutó átlagos vizsgaszámot úgy számítjuk ki, hogy a vizsgák számát elosztjuk a létszámmal.

A b) feladatrészen láttuk, hogy a pontosan egy adott számú vizsgát tevő diákok a táblázatban átlósan találhatóak, így összeadjuk a számokat és megszorozzuk a vizsgák számával. Az így kapott szorzatokat összeadva kapjuk a vizsgák számát:

$$7 \cdot (1 + 1) + 6 \cdot (2 + 6 + 8 + 2) + 5 \cdot 80 + 4 \cdot (2 + 10 + 7 + 3 + 0) + 3 \cdot (5 + 3 + 4 + 1) + 2 \cdot (3 + 2 + 3) + 1 \cdot (8 + 1) = 674.$$

Átlagosan $\frac{674}{152} = 4,43$ darab vizsgát tesznek fejenként a tanulók.

7. Olaszországi kirándulása során Zéta méréssel meghatározta a pisai ferde torony épületének hosszát. A torony talpától először kimért 48 métert abba az irányba, amerre a torony dől, és innen a torony teteje 54,7 fokos szögben látszott. Ezután ugyanabban az irányban még 24 métert ment, ahonnan a torony teteje már csak 42 fokos szögben látszott.



a) Határozzuk meg a torony hosszát Zéta mérési eredményei alapján, majd adjuk meg annak százalékos eltérését a torony valódi hosszúságától, amely 56,3 méter.

(6 pont)

b) Mekkora szöget zár be az épület a vízszintes talajjal?

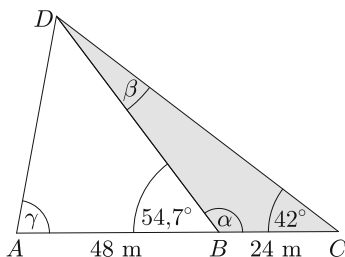
(3 pont)

c) Zéta öccse, Zétény felment a toronyba és közben megszámlolta a lépcsőket. Felérve megállapította, hogy a lépcsőfokok száma egy olyan mértani sorozat harmadik eleme, amelyhez hozzáadva a második elemet 336-ot kapunk összegként. Ugyanezen sorozat ötödik eleméből kivonva a harmadik elemet, a különbség 14 112. Hány lépcsőfok van a pisai ferde toronyban?

(7 pont)

Megoldás. a) Az ábra jelöléseit használva:

$$\alpha = 180^\circ - 54,7^\circ = 125,3^\circ \quad \text{és} \quad \beta = 180^\circ - 125,3^\circ - 42^\circ = 12,7^\circ.$$



A BCD háromszögben alkalmazva a szinuszételt, felírhatjuk a

$$\frac{24}{\sin 12,7^\circ} = \frac{BD}{\sin 42^\circ}$$

egyenletet, amelyből $BD \approx 73$ méter. Most alkalmazzuk a koszinuszételt az ABD háromszögben az AD oldalhossz meghatározására: $AD^2 = 48^2 + 73^2 - 2 \cdot 48 \cdot 73 \cdot \cos 54,7^\circ = 3583,37$, ebből $AD \approx 59,9$ méter. $\frac{59,9}{56,3} \approx 1,064$, tehát a mérések alapján meghatározott érték 6,4%-kal nagyobb a torony valódi hosszánál.

b) A koszinuszételt felhasználhatjuk az ABD háromszögben a dőlésszög nagyságának meghatározására is:

$$\cos \gamma = \frac{59,9^2 + 48^2 - 73^2}{2 \cdot 59,9 \cdot 48}, \quad \text{így} \quad \gamma \approx 84,4^\circ.$$

A torony a vízszintes talajjal hozzávetőlegesen $84,4^\circ$ nagyságú szöget zár be.

c) Legyen $q (\neq 0)$ a mértani sorozat hányadosa, $a_n (\neq 0)$ pedig a sorozat n -edik tagja. Ekkor a feladat szövege alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_3 + a_2 &= 336, \\ a_5 - a_3 &= 14\,112. \end{aligned}$$

Az első egyenletben két egymást követő tag pozitív összeget ad, így a hányados nem lehet -1 sem.

Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ képlet többszöri alkalmazásával átalakítjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q &= 336, \\ a_1 \cdot q^4 - a_1 \cdot q^2 &= 14\,112. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $(a_1 \cdot q)$ -t, a másodikból $(a_1 \cdot q^2)$ -t kiemelve, majd a megfelelő (nemnulla) oldalakat elosztva egymással, a bal oldalon $(a_1 \cdot q)$ -val, míg a jobb oldalon 336-tal egyszerűsítünk: $\frac{q(q^2 - 1)}{q + 1} = 42$, ahol $q \neq -1$. Tudjuk, hogy $q^2 - 1 = (q - 1)(q + 1)$, így $(q + 1)$ -gyel is egyszerűsíthetünk, így a $q(q - 1) = 42$ egyenlethez jutunk, amelynek gyökei $q_1 = 7$ és $q_2 = -6$. A kapott értékeket az $a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q = 336$ egyenletbe helyettesítve $a_{1_1} = 6$ és $a_{1_2} = 11,2$, ebből $a_{3_1} = 6 \cdot 7^2 = 294$, ugyanakkor $a_{3_2} = 11,2 \cdot (-6)^2 = 403,2$, az utóbbi nem egész szám, ezért nem felel meg a feladat feltételeinek.

A pisai ferde toronyban 294 lépcső van.

8. Adott a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \quad \text{és} \quad g(x) = 3x + 1$$

függvény.

a) Írjuk fel az $u = f \circ g$ és a $v = g \circ f$ függvények hozzárendelési szabályát, határozzuk meg értelmezési tartományukat és értékkészletüket.

(8 pont)

b) Adjuk meg az $f(x)$, illetve a $g(x)$ függvény egy-egy olyan leszűkítését, amelynek értékkészlete

- $] -3; 5]$;
- *a természetes számok halmaza*;
- *a racionális számok halmaza*.

Megoldás. a) $u(x) = f(g(x)) = \log_{\frac{1}{3}}(3x + 1)$, ahol $3x + 1 > 0$, $x > -\frac{1}{3}$, ezért $D_u =] -\frac{1}{3}; \infty [$, $R_u = \mathbb{R}$.
 $v(x) = g(f(x)) = 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x) + 1$, ahol $x > 0$, ezért $D_v = \mathbb{R}^+$, $R_v = \mathbb{R}$.

b) Az $f(x)$ függvény folytonossága és szigorú monoton csökkenése miatt elegendő a megadott értékészlet végpontjainak megfelelően vizsgálatokat végezni, azaz megoldani a következő két egyenlőtlenséget: $\log_{\frac{1}{3}} x > -3$, amelyből $x < 27$; illetve $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 5$, amelyből $x \geq \frac{1}{243}$, így a megfelelő leszűkítés a következő:

$$f(x)_1: \left[\frac{1}{243}; 27 \right[\rightarrow] -3; 5] .$$

A másik két leszűkítésnél a logaritmus alapjának megfelelő hatványai alkotják az értelmezési tartományt, így a kért leszűkítések rendre:

$$f(x)_2: \left\{ x \mid x = \left(\frac{1}{3} \right)^n ; n \in \mathbb{N} \right\} \rightarrow \mathbb{N}; \quad \text{illetve}$$

$$f(x)_3: \left\{ x \mid x = \left(\frac{1}{3} \right)^q ; q \in \mathbb{Q} \right\} \rightarrow \mathbb{Q} .$$

A $g(x)$ függvény leszűkítéseit a fentiekhez hasonlóan határozhatjuk meg. Ezek rendre:

$$g(x)_1: \left] -\frac{4}{3}; \frac{4}{3} \right] \rightarrow] -3; 5] ;$$

$$g(x)_2: \left\{ x \mid x = \frac{1}{3}(n - 1); n \in \mathbb{N} \right\} \rightarrow \mathbb{N}; \quad \text{illetve} \quad g(x)_3: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} .$$

9. Egy 7 dm hosszúságú szakaszt felosztunk két részre.

a) Bizonyítsuk be, hogy az így kapott egyik szakaszhoz köbének és a másik szakaszhoz négyzetének szorzata akkor a legnagyobb, ha az egyik szakasz hossza 42 cm.

(8 pont)

b) Hány olyan különböző háromszög van, amelynek két oldala az a) részben kapott két szakasz, és a harmadik oldalának hossza is centiméterben mérve egész szám?

(3 pont)

c) Mekkora lehet a legnagyobb belső szöge annak a háromszögnek a fentiek közül, amelynek oldalhosszai számtani sorozatot alkotnak?

(5 pont)

Megoldás. a) Legyen az eredeti szakasz egyik részének hossza x cm ($0 < x < 70$), ekkor a másik rész hossza $70 - x$ cm.

Keressük az $f(x) = x^3 \cdot (70 - x)^2$ függvény lokális maximumát az adott intervallumon.

$$f(x) = x^5 - 140x^4 + 4900x^3,$$

ennek deriváltfüggvénye

$$f'(x) = 5x^4 - 560x^3 + 14700x^2.$$

A függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla: $5x^4 - 560x^3 + 14700x^2 = 0$. A kapott egyenlet mindkét oldalát elosztva az x^2 pozitív értékű kifejezéssel másodfokú egyenletet kapunk: $5x^2 - 560x + 14700 = 0$, amelynek gyökei $x_1 = 70$ és $x_2 = 42$.

Az első megoldás nem eleme az értelmezési tartománynak, a második megoldás eleme. Ellenőrizzük, hogy $x = 42$ -nél valóban lokális maximuma van a függvénynek. Ezt többféleképpen is megtehetjük, például a második derivált segítségével:

$$f''(42) = 20 \cdot 42^3 - 1680 \cdot 42^2 + 29400 \cdot 42 = -246960,$$

azaz itt a második deriváltfüggvény értéke negatív, tehát valóban lokális maximumhelyet találtunk, így a feladat állítását beláttuk.

b) A háromszög két oldalának hossza 28 és 42 cm, a harmadiké legyen z cm ($z \in \mathbb{Z}^+$). A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva: $28 + z > 42$ és $42 + 28 > z$, amiből $14 < z < 70$. 55 ilyen egész szám van, tehát 55 különböző háromszög létezik, amely megfelel a feltételeknek.

c) Három esetet kell megvizsgálnunk aszerint, hogy z oldal 1) a legrövidebb, 2) a leghosszabb, vagy 3) 28 és 42 cm között van.

1. eset. $z; 28; 42$ számtani sorozat egymást követő elemeiként igaz, hogy $28 = \frac{z + 42}{2}$; ebből $z = 14$, ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt nem lehet, így nincs ilyen háromszög.

2. eset. $28; 42; z$, ekkor $42 = \frac{28 + z}{2}$; ebből $z = 56$ cm. A háromszög oldalai 28; 42 és 56 centiméteresek, a legnagyobb belső szög a leghosszabb oldallal szemben fekszik. A koszinusztételt alkalmazva, a keresett szöget φ -vel jelölve:

$$\cos \varphi = \frac{28^2 + 42^2 - 56^2}{2 \cdot 28 \cdot 42} = -\frac{1}{4}; \quad \varphi \approx 104,5^\circ.$$

3. eset. $28; z; 42$, ekkor $z = \frac{28 + 42}{2} = 35$ cm, így a legnagyobb belső szög a 42 centiméteres oldallal szemközt található, jelöljük ω -val. A 2. esetben látott módon meghatározzuk ω nagyságát,

$$\omega = \frac{28^2 + 35^2 - 42^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} = \frac{1}{8}; \quad \omega \approx 82,8^\circ.$$

A feltételeknek megfelelő háromszög legnagyobb belső szögének nagysága $82,8^\circ$ vagy $104,5^\circ$ lehet.