I. rész

1. *a) Hány olyan egész szám van, amelyre teljesül, hogy* $(x+2)^3-(x-2)^3<2020$?

(5 pont)

Ha barátunk találkozik egy lánnyal a vizsgaidőszakban, akkor $\frac{2}{3}$ *valószínűséggel szerelmes lesz belé. Ha szerelmes, akkor nem tud koncentrálni, ezért csak* 10% *az esélye annak, hogy fel tud készülni a vizsgáira, míg ha éppen nem szerelmes, akkor ez az arány* 70%.

b) Mutassuk meg, hogy a sikeres vizsga valószínűsége 0,3.

(5 pont)

c) Ha tudjuk, hogy sikerült a vizsgája, mennyi annak a valószínűsége, hogy szerelmes?

Megoldás. *a)* Mivel $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$ és $(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$, ezért $(x+2)^3-(x-2)^3=12x^2+16$. Meg kell oldjuk a $12x^2+16<2020$ egyenlőtlenséget. Ennek megoldása: $|x|<\sqrt{167}\approx 12{,}9$.

Mivel x egész szám, ezért: $x\in\{-12;-11;\ldots;-1;0;1;\ldots;11;12\}$. Ennek a halmaznak 25 eleme van. Tehát 25 olyan egész szám van, amely kielégíti az egyenlőtlenséget.

b) Vezessük be az alábbi eseményeket. SZ: szerelmes lesz a barátunk, V: sikeres vizsgát tesz a barátunk. A feladat szerint $P(\mathrm{SZ})=\frac{2}{3}\Rightarrow P(\overline{\mathrm{SZ}})=\frac{1}{3}$, $P(\mathrm{V}\mid\mathrm{SZ})=0{,}1$, $P(\mathrm{V}\mid\overline{\mathrm{SZ}})=0{,}7$. A teljes valószínűség tétele szerint

$$P(\mathrm{V})=P(\mathrm{V}\mid\mathrm{SZ})\cdot P(\mathrm{SZ})+P(\mathrm{V}\mid\overline{\mathrm{SZ}})\cdot P(\overline{\mathrm{SZ}})=0{,}3.$$

c) Bayes tétele szerint

$$P(\mathrm{SZ}\mid\mathrm{V})=\frac{P(\mathrm{V}\mid\mathrm{SZ})\cdot P(\mathrm{SZ})}{P(\mathrm{V})}=\frac{0{,}1\cdot\frac{2}{3}}{0{,}3}=\frac{2}{9}.$$

2. *a) Egy mértani sorozat harmadik tagja* 32, *a hatodik tagja* 2048. *Számítsuk ki a sorozat első hat tagjának az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését.*

(6 pont)

Tekintsük a következő állításokat.

A: Egy adatsokaság mediánja mindig eleme az adatsokaságnak.

B: Ha $f(x)=3x+2$ *és* $g(x)=|x|-1$, *akkor* $f\big(g(x)\big)=3\cdot|x|-1$. *(Itt* $f\big(g(x)\big)$ *összetett függvény képzését jelöli.)*

C: Ha egy sorozat nem konvergens, akkor nem monoton.

b) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Mindenhol indokolni is kell, példával, ellenpéldával, számolással stb.

(6 pont)

c) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk.

(2 pont)

Megoldás. *a)* Jelölje a sorozat első tagját a_1, a hányadosát q. Ekkor $a_1q^2=32$ és $a_1q^5=2048$. Ezeket osszuk el egymással. Kapjuk, hogy $\frac{a_1q^5}{a_1q^2}=q^3=64\Rightarrow q=4\Rightarrow a_1=2$.

Tehát a sorozat első hat tagja: 2, 8, 32, 128, 512, 2048. Ezen számok átlaga $\overline{x}=455$, így az első hat tagnak az átlagtól mért átlagos abszolút eltérése:

$$\frac{|455-2|+|455-8|+|455-32|+|455-128|+|455-512|+|455-2048|}{6}=550.$$

b) Az A állítás hamis, mert pl. az 1, 2, 3, 4 számok esetén a medián $\frac{2+3}{2}=2{,}5$.

A B állítás igaz, ugyanis $f\big(g(x)\big)=f\big(|x|-1\big)=3\cdot\big(|x|-1\big)+2=3\cdot|x|-1$.

A C állítás hamis, ugyanis az $a_n=n$ sorozat nem konvergens, de monoton.

c) Az C állítás megfordítása: *Ha egy sorozat nem monoton, akkor nem konvergens.* Vagy másképpen mondva: *Ha egy sorozat konvergens, akkor monoton.*

Az állítás hamis, ugyanis az $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ sorozat konvergens, de nem monoton.

3. *a) Egy derékszögű trapézba kör írható. Az alapok hossza 150 cm és 300 cm. Mekkora a beírt kör sugara?*

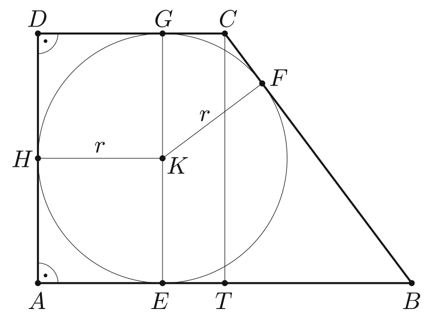
(7 pont)

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\log_2(x^2y)=4,$$
$$\log_4 x-3\log_4 y=-\frac{5}{2}.$$

(7 pont)

Megoldás. *a*) Jelölje r a beírt kör sugarát. Az $AEKH$ és $HKGD$ négyszögek négyzetek és külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért $FC = GC = 150 - r$ és $BF = BE = 300 - r$.



Ezért $BC = 450 - 2r$. A TCB háromszögben $TC = 2r$ és $TB = 150$. Pitagorasz tétele szerint

$$(2r)^2 + 150^2 = (450 - 2r)^2 \;\Rightarrow\; r = 100.$$

Tehát a kör sugara 100 cm.

Megjegyzés. Máshogyan is megkaphattuk volna, hogy $BC = 450 - 2r$. Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, ezért a szemközti oldalak összege megegyezik és így $300 + 150 = 2r + BC \Rightarrow BC = 450 - 2r$.

b) A kifejezések akkor értelmezettek, ha $x, y > 0$. A logaritmus definíciója miatt $\log_2(x^2y) = 4 \Rightarrow x^2y = 16$. A logaritmus azonossága és definíciója miatt

$$\log_4 x - 3\log_4 y = \log_4 x - \log_4 y^3 = \log_4 \frac{x}{y^3} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{y^3}{32}.$$

Innen $x^2 = \dfrac{y^6}{1024}$. A másik egyenletből $x^2 = \dfrac{16}{y}$. Tehát $\dfrac{y^6}{1024} = \dfrac{16}{y} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 2$.

Ellenőrzés.

4. *a*) *Tekintsük a (8 × 8-as) sakktábla mezőinek középpontjait egy gráf csúcsainak. Két csúcs között pontosan akkor vezessen él, ha az egyik mezőről el lehet jutni a másikra egy szabályos futólépéssel. Hány éle van az így kapott gráfnak? (A futó átlósan képes lépni akármennyit.)*

(5 pont)

b) *Adott az f függvény: $f(x) = 90x^2 - 6x^3$. Határozzuk meg a p lehetséges értékeit úgy, hogy $\int\limits_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ teljesüljön.*

(6 pont)

Megoldás. *a*) A sakktáblába be fogjuk írni az egyes csúcsok fokszámait.

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

A fokszámösszeg:

$$28 \cdot 7 + 20 \cdot 9 + 12 \cdot 11 + 4 \cdot 13 = 560.$$

Ismert, hogy a fokszámösszeg az élek számának a kétszerese, ezért az élek száma 280.

b) Integrálunk és használjuk a Newton–Leibniz-tételt:

$$\int_0^p (90x^2 - 6x^3)\,\mathrm{d}x = \left[30x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^p = \left(30p^3 - \frac{3}{2}p^4\right) - (0 - 0) = p^3 \cdot \left(30 - \frac{3}{2}p\right).$$

A feladat feltétele szerint $p^3 \cdot \left(30 - \dfrac{3}{2}p\right) = 0 \Rightarrow p_1 = 0,\ p_2 = 20$.

Tehát a feladat két megoldása $p_1 = 0$ és $p_2 = 20$.

II. rész

5. *a) Melyek azok a háromjegyű pozitív egész számok, amelyekhez megadható olyan hárompontú egyszerű gráf, hogy annak fokszámai megegyeznek a háromjegyű szám számjegyeivel? Minden esetben adjuk is meg a megfelelő gráfokat.*

(6 pont)

Tekintsük a következő, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvényt:

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}.$$

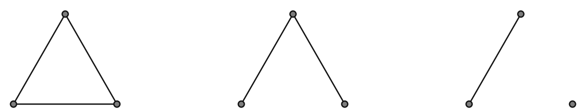
b) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt.

(6 pont)

c) Hány rácsponton megy át a függvény? (Rácspont: olyan pont a koordináta-rendszerben, amelynek mindkét koordinátája egész szám.)

(4 pont)

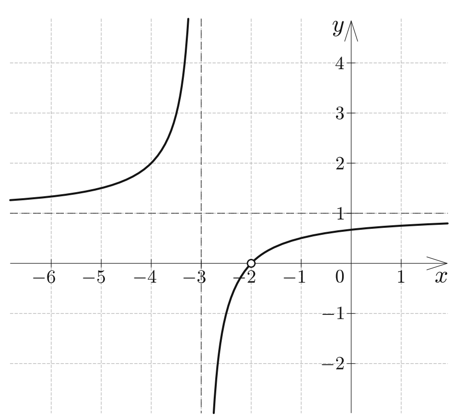
Megoldás. *a)* A gráf egyszerű, ezért a pontok fokszámai 0, 1, 2 lehetnek. A lehetséges fokszámsorozatok:
1. eset: 2, 2, 2. Ehhez 1 darab háromjegyű szám tartozik: 222.
2. eset: 2, 1, 1. Ehhez 3 darab háromjegyű szám tartozik: 211, 121, 112.
3. eset: 1, 1, 0. Ehhez 2 darab háromjegyű szám tartozik: 110, 101.
A gráfok:



b) A nevezőt és a számlálót is szorzattá tudjuk alakítani pl. nevezetes azonosságok, gyöktényezős alak segítségével. Kapjuk, hogy $x^2+4x+4=(x+2)^2$ és $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$. Ezért

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6} = \\ &= \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3} = \\ &= 1-\frac{1}{x+3}. \end{aligned}$$

A függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$.



c) Feladatunk azt meghatározni, hogy hány x egész szám esetén teljesül, hogy $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$ is egész szám. Tudjuk, hogy az értelmezettség miatt $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-2; -3\}$ és

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6} = 1-\frac{1}{x+3}.$$

Ezért ahhoz, hogy ez egész kifejezés tudjon lenni, teljesülni kell, hogy $x+3 \mid 1$.
1. eset: Ha $x+3=1 \Rightarrow x=-2$, de ez nem lehetséges.
2. eset: Ha $x+3=-1 \Rightarrow x=-4$. Ez megfelelő.
Tehát a függvény 1 rácsponton megy át, mely a $P(-4; 2)$.

6. *a) Jelölje p_n az n-edik pozitív prímszámot. Hány 0-ra végződik a*

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{2020}$$

szorzat?

(3 pont)

Az ABC háromszög oldalai: $AB = 9$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 6$ cm.

b) Mutassuk meg, hogy a beírt kör sugara egy tizedre kerekítve 1,9 cm.

(2 pont)

c) Mekkora érintési szakaszok húzhatók a B csúcsból a beírt körhöz?

(4 pont)

d) Mekkora annak a konkáv síkidomnak a területe, amelyet a B csúcsból húzott két érintési szakasz és a beírt kör íve határol?

(7 pont)

Megoldás. *a)* A 0-ra végződés a 10-zel való oszthatósággal kapcsolatos. A szám pontosan annyi 0-ra fog végződni, ahányszor maximálisan osztható 10-zel. A kérdés az, hogy a szám 2-nek és 5-nek legfeljebb hányadik hatványával osztható. A szorzatban a 2 az egyedüli páros szám és van 5-ös a szorzatban. Ezért a szám 10-zel osztható, de 100-zal már nem.

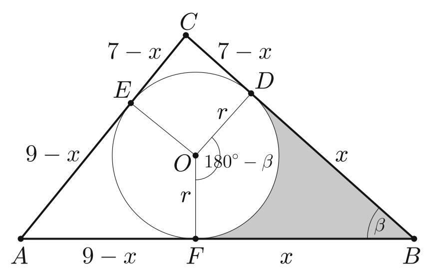
A szorzat 1 darab 0-ra végződik.

b) A félkerület: $s = 11$ (cm). Területe Hérón-képlettel: $T = \sqrt{11 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} \approx$ $\approx 20{,}976$ (cm^2). A beírt kör sugara:

$$r = \frac{T}{s} \approx \frac{20{,}976}{11} \approx 1{,}907 \text{ (cm)},$$

ami egy tizedesjegyre kerekítve valóban 1,9 (cm).

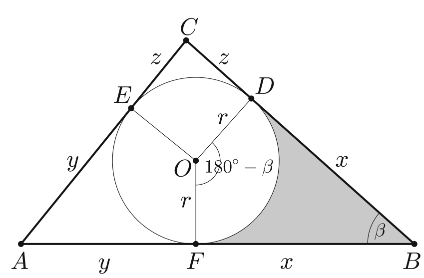
c) I. megoldás. Készítsünk *ábrát.* Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. (Mindent cm-ben adunk meg.)



Ha $BF = BD = x$, akkor $AF = AE = 9 - x$ és $CD = CE = 7 - x$. Felírjuk AC-t: $AC = (9 - x) + (7 - x) = 6 \Rightarrow$ $x = 5$ (cm).

Tehát az érintési szakasz hossza 5 cm.

II. megoldás. Készítsünk *ábrát.* Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. (Mindent cm-ben adunk meg.) Legyen $BF = BD = x$, $AF = AE = y$ és $CD = CE = z$.



Ekkor $x + y = 9$, $x + z = 7$, $y + z = 6$. Összeadva az egyenleteket kapjuk, hogy $2(x + y + z) = 22 \Rightarrow x + y + z = 11$. Innen $x = (x + y + z) - (y + z) = 11 - 6 = 5$.

Tehát az érintési szakasz hossza 5 cm.

III. megoldás. Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben:

$$6^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos\beta \ \Rightarrow\ \cos\beta = \frac{47}{63} \ \Rightarrow\ \beta \approx 41{,}752°.$$

Az FBO háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{x} \ \Rightarrow\ x = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \approx \frac{1{,}907}{\operatorname{tg} 20{,}876°} \approx 5 \text{ (cm)}.$$

Tehát az érintési szakasz hossza 5 cm.

d) Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben:

$$6^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos\beta \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{47}{63} \;\Rightarrow\; \beta \approx 41{,}752°.$$

Az $OFBD$ négyszög deltoid, területe:

$$T_{OFBD} = 2 \cdot T_{OFB} = 2 \cdot \frac{rx}{2} = rx = 9{,}535\ (\mathrm{cm}^2).$$

Most meghatározzuk a körcikk területét $r = 1{,}907$ (cm-rel számolva:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\pi \cdot (180° - \beta)}{360°} \approx 4{,}387\ (\mathrm{cm}^2).$$

A konkáv alakzat területe: $T_{\text{konkáv}} = T_{OFBD} - T_{\text{körcikk}} \approx 5{,}15\ (\mathrm{cm}^2)$.

Tehát a konkáv síkidom területe 5,15 cm^2.

7. *a) Adjuk meg a $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 2020$ egyenletű k kör középpontját és sugarát.*

(4 pont)

b) Egy négyzet két szemközti csúcsának koordinátái $A(1;1)$ és $C(5;3)$. Írjuk fel a négyzetbe írható kör egyenletét.

(4 pont)

c) Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyek egyszerre felezik a fenti négyzet és a k kör területét.

(3 pont)

d) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$3^{2(x+1)(x-2)} = 9^{\frac{x+1}{x-2}}. \qquad (5\ pont)$$

Megoldás. *a)* Osszuk el 3-mal az egyenletet és alakítsunk ki teljes négyzeteket.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = \frac{2020}{3} \;\Rightarrow\; (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{2035}{3}.$$

Tehát a kör középpontja $K(1;-2)$ és sugara $r = \sqrt{\dfrac{2035}{3}}$.

b) A négyzet középpontja az AC szakasz felezőpontja, mely megegyezik a beírható kör középpontjával is. Jelöljük ezt F-fel. Ekkor $F(3;2)$. Kapjuk, hogy $AF = \sqrt{5}$, ezért a beírt kör sugara $r = \dfrac{AF}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$, ezért az egyenlete

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{2}.$$

c) A k kör és a négyzet területét egyszerre felező egyenes biztosan átmegy a kör és a négyzet középpontján. Mivel $K(1;-2)$ és $F(3;2)$, ezért egyetlen egyenes van, amely megfelel a feltételeknek. Ennek egy irányvektora $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{KF} = (2;4) \Rightarrow \overrightarrow{n}(2;-1)$.

Az egyenes egyenlete: $2x - y = 4$.

d) Először kikötést végzünk: $x \neq 2$. Az $f(x) = 9^x$ függvény szigorú monotonitása miatt:

$$3^{2(x+1)(x-2)} = 9^{\frac{x+1}{x-2}} \;\Rightarrow\; 9^{(x+1)(x-2)} = 9^{\frac{x+1}{x-2}} \;\Rightarrow\; (x+1)(x-2) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Innen $(x+1)(x-2)^2 - (x+1) = 0$ adódik, majd kiemelés után kapjuk, hogy $(x+1) \cdot \left[(x-2)^2 - 1\right] = 0$. Egy szorzat akkor és csakis akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, azaz $x + 1 = 0$ vagy $(x-2)^2 - 1 = 0$. Innen adódnak az $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ gyökök.

Ellenőrzés.

8. *a) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy bármely két számjegye relatív prím egymáshoz?*

(7 pont)

b) Egy dobozban cukorkák vannak, 2 narancsos és 3 citromos. Addig veszünk ki cukorkákat (a kivett cukorkákat elszopogatjuk), amíg mindkét fajtából húzunk legalább egyet. Határozzuk meg annak az öt eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, illetve 5 cukorka kihúzására lesz szükség, majd számítsuk ki a húzások számának várható értékét.

(9 pont)

Megoldás. *a*) Esetszétválasztást fogunk végezni több szempont alapján. Először megnézzük, hogy van-e 0 a számjegyek között.

1. eset: Ha van 0 a jegyek között, akkor csak 1-esek lehetnek még a számjegyek között. A képezhető háromjegyű számok: 101 és 110. Ez 2 lehetőség.

2. eset: Ha nincs 0 a számjegyek között. Itt 3 esetet fogunk megvizsgálni.

2/a. eset: Ha a számjegyek mind egyformák. Ekkor a számjegy csak 1-es lehet. A képezhető háromjegyű szám: 111. Ez 1 lehetőség.

2/b. eset: Ha a számjegyek között két egyforma és egy tőlük különböző van. A két egyforma számjegy csak 1-es lehet, míg a tőlük különböző harmadik számjegy 8-féle lehet $(2; 3; \ldots; 9)$.

Az 1, 1, 2 számjegyekből 3 darab háromjegyű számot tudunk képezni, ez igaz a többi esetben is. Így ekkor összesen $8 \cdot 3 = 24$ lehetőség van.

2/c. eset: Ha a számjegyek különböznek egymástól. Ekkor az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyekből képezünk 6 darab csoportot: $\{1\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2; 4; 8\}$, $\{3; 9\}$, $\{6\}$.

Itt két lényegesen eltérő esetet fogunk vizsgálni.

2/c-i. eset: Ha a számjegyek között van 6-os. Ekkor a maradék két számjegy az 1, 5, 7 közül kerül ki. Erre $\binom{3}{2} = 3$ lehetőség van. Ekkor $3 \cdot 3! = 18$ háromjegyű számot tudunk képezni.

2/c-ii. eset: Ha a számjegyek között nincs 6-os. Ezen eseten belül további 3 alesetet fogunk megkülönböztetni aszerint, hogy a $\{2; 4; 8\}$ és $\{3; 9\}$ nagyobb elemszámú csoportokból bekerülnek-e elemek a számjegyek közé.

2/c-ii-A. eset: Ha mindkét csoportból kerül be egy-egy elem. Ekkor összesen $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3! = 108$ háromjegyű szám képezhető.

2/c-ii-B. eset: Ha csak az egyik csoportból kerül be elem. Ekkor összesen $5 \cdot \binom{3}{2} \cdot 3! = 90$ háromjegyű szám képezhető.

2/c-ii-C. eset: Ha egyik csoportból sem kerül be elem. Ekkor az 1, 5, 7 számjegyekkel kell dolgozni. Ekkor összesen $3! = 6$ háromjegyű szám képezhető.

Tehát összesen $2 + 1 + 24 + 18 + 108 + 90 + 6 = 249$ háromjegyű szám felel meg a feltételeknek.

Megjegyzés. A *2/c. eset*-et másképp is megoldhattuk volna. Felsoroljuk az összes olyan számhármast (a követhetőség kedvéért számjegyei szerint növekvő sorrendben), amelyben nincs 0 számjegy, minden számjegye különböző és megfelel a feltételeknek. Ezek az alábbiak: 123, 125, 127, 129, 134, 135, 137, 138, 145, 147, 149, 156, 157, 158, 159, 167, 178, 179, 189, 235, 237, 257, 259, 279, 345, 347, 357, 358, 378, 457, 459, 479, 567, 578, 579, 589, 789. Ezek száma 37, így belőlük $37 \cdot 3! = 222$ háromjegyű szám képezhető és a *2/c. esetben* valóban ennyi esetet számolhatunk meg, ugyanis $18 + 108 + 90 + 6 = 222$.

b) Jelölje ξ azt, hogy hány cukorkát kell ahhoz kihúzni, hogy mindkét fajta cukorkából legyen nálunk. Ekkor $P(\xi = 1) = 0$. Legfeljebb 4 húzás szükséges ahhoz, hogy legyen narancsos és citromos is a kihúzottak között. Ezért $P(\xi = 5) = 0$. Jelölje N a narancsos és C a citromos cukorkát. Jelölje NC azt, hogy először narancsosat, majd utána citromosat húzunk.

Ekkor $P(\mathrm{NC}) = \dfrac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = 0{,}3$. Akkor kell pontosan kettőt húzni, ha NC vagy CN a húzás. Ezért

$$P(\xi = 2) = P(\mathrm{NC}) + P(\mathrm{CN}) = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = 0{,}6.$$

Akkor kell pontosan hármat húzni, ha NNC vagy CCN a húzás.

$$P(\mathrm{NNC}) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0{,}1.$$

Mivel $P(\mathrm{CCN}) = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 0{,}2$, ezért $P(\xi = 3) = P(\mathrm{NNC}) + P(\mathrm{CCN}) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

Akkor kell pontosan négyet húzni, ha CCCN a húzás.

$$P(\xi = 4) = P(\mathrm{CCCN}) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 0{,}1.$$

A várható érték: $E(\xi) = 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 = 2{,}5$.

9. *Bergengócia 2025-re foci világbajnokságot szeretne rendezni, melyet a frissen felépített stadionban rendeznek meg. A rendezvény logója egy 2025 pontú teljes gráf lesz, melynek éleit piros, fehér és zöld színnel színezik. (Minden élt kiszíneznek és minden él csak egyfajta színű lehet. Nem feltétlenül kell mindegyik színt használni, de csak ezeket használhatják.) Közvéleménykutatás keretében kiderítették, hogy azok a legszebb színezések, ahol a fehér élek száma kétszerese a piros élek számának (és egyik sem 0).*

a) Hányféle értéke lehet a piros élek számának?

(4 pont)

Egy sajtótájékoztatón azt is elmondták, hogy a fenti színezések közül egy olyat fognak választani, amelyben a különböző színű élek számának a szorzata a legnagyobb lesz.

b) Hány piros színű éle lesz a logónak?

(6 pont)

c) János egy szabályos tízszög átlói közül véletlenszerűen kijelöl ötöt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek között az élek között lesz legalább egy a legrövidebb vagy a leghosszabb átlók közül? Az eredményt normálalakban adjuk meg.

(6 pont)

Megoldás. *a)* A 2025 pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{2025}{2} = 2\,049\,300$. Ha a piros élek száma p, akkor a fehérek száma $2p$ és a zöldek száma $2\,049\,300 - 3p$. Ezek mindegyike pozitív, ezért $1 \le p \le 683\,100$. Tehát 683 100-féle értéke lehet a piros élek számának.

b) I. megoldás. A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(p) = p \cdot 2p \cdot (2\,049\,300 - 3p) = -6p^3 + 4\,098\,600p^2$$

és értelmezési tartománya az $\{1; 2; \ldots; 683\,100\}$ halmaz. Tekintsük a függvényt folytonosnak. A függvény deriváltja: $f'(p) = -18p^2 + 8\,197\,200p$. A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(p) = 0$. Ennek megoldásai: $p_1 = 0$ és $p_2 = 455\,400$. Ha $0 < p < 455\,400$, akkor $f'(p) > 0$. Ha $455\,400 < p \le 683\,100$, akkor $f'(p) < 0$. A függvénynek $p = 455\,400$ helyen helyi maximuma van.

Tehát a piros színű élek száma 455 400.

II. megoldás. A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(p) = p \cdot 2p \cdot (2\,049\,300 - 3p) = -6p^3 + 4\,098\,600p^2$$

és értelmezési tartománya az $\{1; 2; \ldots; 683\,100\}$ halmaz. Tekintsük a függvényt folytonosnak. A függvény deriváltja: $f'(p) = -18p^2 + 8\,197\,200p$. A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(p) = 0$. Ennek megoldásai: $p_1 = 0$ és $p_2 = 455\,400$. Az egyedüli kritikus pont a 455 400.

A függvény második deriváltja: $f''(p) = -36p + 8\,197\,200$. Mivel $f''(455\,400) = -8\,197\,200 < 0$, ezért itt helyi maximuma van a függvénynek.

Tehát a piros színű élek száma 455 400.

III. megoldás. A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(p) = p \cdot 2p \cdot (2\,049\,300 - 3p) = -6p^3 + 4\,098\,600p^2$$

és értelmezési tartománya az $\{1; 2; \ldots; 683\,100\}$ halmaz. Írjuk fel az $1{,}5p$, $1{,}5p$, $2\,049\,300 - 3p$ mennyiségek számtani és mértani közepét. Számtani közép:

$$\frac{1{,}5p + 1{,}5p + (2\,049\,300 - 3p)}{3} = 683\,100.$$

Mértani közép:

$$\sqrt[3]{1,5p \cdot 1,5p \cdot (2\,049\,300 - 3p)}.$$

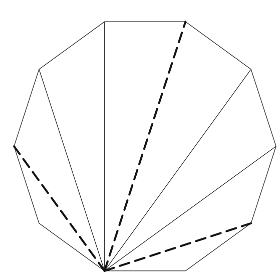
A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt[3]{1{,}5p \cdot 1{,}5p \cdot (2\,049\,300 - 3p)} \le 683\,100.$$

A közepek között akkor lehetséges egyenlőség, ha minden szereplő mennyiség megegyezik, azaz $1{,}5p = 2\,049\,300 - 3p$. Ennek a megoldása $p = 455\,400$.

Tehát a piros színű élek száma 455 400.

c) Az átlók száma $\frac{10 \cdot 7}{2} = 35$. Az *ábrán* szaggatott vonallal berajzoltuk, hogy az egy csúcsból húzható 7 átlóból 3 olyan, ami „rövid” vagy „hosszú”.



A „rövid” vagy „hosszú” élek száma összesen $\frac{10 \cdot 3}{2} = 15$, ezért a többi él száma 20.

$$P(\text{lesz hosszú vagy rövid}) =$$
$$= 1 - P(\text{nincs benne egyik sem}) = 1 - \frac{\binom{20}{5}}{\binom{35}{5}}.$$

A keresett valószínűség kb. 0,9522, ami normálalakban megadva $9{,}522 \cdot 10^{-1}$.

Fridrik Richárd, Szeged