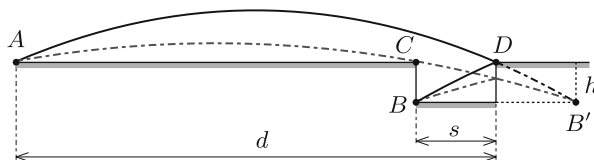


A 2020. évi Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny elméleti feladatainak megoldása¹

F1. a) A golyó csak úgy érkezhethet a gödör B sarkába, ha előtte a gödör függőleges oldalain páratlan számszor visszapattan. Minden visszaverődésnél a kis test sebességének vízszintes komponense előjelet vált, függőleges komponense pedig változatlan marad. A pattogó golyó pályáját a függőleges falakra való tükrözéssel „ki lehet hajtogatni”, és így töréspontok nélküli parabolát kapunk. Nyilvánvaló, hogy közelebbi pontba kisebb kezdősebességgel eljuttatható a golyó, tehát az optimális (kihajtogatott) pálya esetén a golyó csak egyszer pattan meg. Most már csak az a kérdés, hogy az eldobás helyétől távolabbi falon hol legyen a pattanási pont.



1. ábra

Paraméterezzük a feladatot! Legyen $d = 12$ m a gödör távolabbi falának távolsága az A ponttól, $s = 2$ m a gödör szélessége, $h = 1$ m a gödör mélysége. Ezeken kívül használni fogjuk még az $L = d + s = 14$ m távolságot is. Jelölje C és D a gödör A ponthoz közelebbi, illetve távolabbi felső sarkát, B' pedig a B pontnak a gödör távolabbi falára vonatkozó tükröképét (1. ábra). A kihajtogatott pálya tehát egy olyan parabola, amely átmegy az A és B' pontokon.

Az A és B' pontokat összekötő lehetséges parabolák közül csak azokat választhatjuk, amelyek „beesnek” a gödörbe, azaz a talaj szintjét a CD szakaszon metszik. Szemléletesen látható, hogy ezek közül a pályák közül a legmagasabb, ADB' parabolához tartozik a legkisebb kezdősebesség, míg a leglaposabb, ACB parabolához a legnagyobb kezdősebesség. (Itt figyelembe vettük azt a tényt is, hogy a feladat adatai alapján lapos, 45° -nál jóval kisebb szögben induló hajításokról van szó.)

*

Megjegyzés. Az intuíciónkat számolással is igazolhatjuk. Ha a hajítás kezdősebessége v , az indítás hajlásszöge α , akkor az A és B' pontok közötti vízszintes ($L = d + s$) és függőleges ($-h$) elmozdulásokra a következőket írhatjuk fel:

$$L = vt \cos \alpha, \quad -h = vt \sin \alpha - \frac{g}{2}t^2,$$

amiből a mozgás t idejének kiküszöbölése után az alábbi kifejezést kapjuk v -re:

$$(1) \quad v^2 = \frac{gL^2}{2 \cos^2 \alpha (L \tan \alpha + h)}.$$

Ahhoz, hogy kiderüljön, hogyan változik v nagysága az α szög kis megváltoztatásakor, vizsgáljuk meg a tört nevezőjének szög szerinti deriváltját:

$$[2 \cos^2 \alpha (L \tan \alpha + h)]' = 2L - 2(h + L \tan \alpha) \sin 2\alpha.$$

A távolságadatok behelyettesítésével könnyen ellenőrizhető, hogy ez a derivált $\alpha \approx 40^\circ$ és annál kisebb szögekre biztosan pozitív, azaz „lapos” hajítási szögek esetén a B' pont eltalálásához szükséges v sebesség annál kisebb, minél nagyobb az α szög értéke. A gödörbe beleeső golyó lehetséges pályái közül az 1. ábrán látható C ponton átmenő parabolához tartozik a legkisebb α szög, míg α értéke a D ponton átmenő pálya esetén a legnagyobb. Tehát az optimális pálya a gödör távolabbi függőleges falát a legfelső, D pontban találja el, majd egy pattanás után a kis test a B pontba érkezik.

*

b) A kinematikai egyenletekből kiindulva felírhatjuk az optimális pálya AD szakaszán a golyó vízszintes elmozdulását az α szög és a v kezdősebesség segítségével:

$$(2) \quad d = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

A megjegyzésben szereplő (1) egyenletből beírva ide v^2 -et megkapjuk a hajítási szöget:

$$\tan \alpha = \frac{hd}{L(L-d)} = \frac{3}{7} \quad \longrightarrow \quad \alpha = 23,2^\circ.$$

¹ A feladatok szövege a KöMaL múlt havi számában olvasható.

Ezt az eredményt visszaírva a (2) egyenletbe a következő kifejezéshez jutunk:

$$v^2 = \frac{gd}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{gd(1 + \tan^2 \alpha)}{2 \tan \alpha}.$$

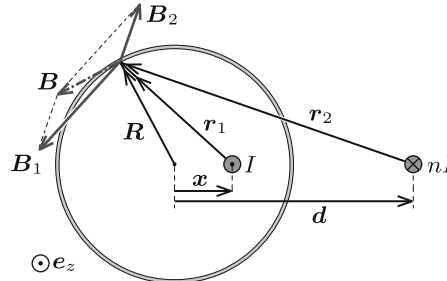
Az adatokat behelyettesítve végül megkapjuk a sebesség számszerű értékét:

$$v = \sqrt{\frac{29}{21}gd} = 12,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

F2. Mivel a szupravezető belsejébe a mágneses tér nem hatolhat be, az indukcióvonalak folytonosságából következően a mágneses indukcióvektornak mindenhol érintőirányúnak kell lennie a cső külső és belső felülete mentén. A feladatunk az, hogy a határfeltételt kielégítő (felületi) árameloszlást megtaláljuk.

Az ilyen, ún. peremérték-problémákat középiskolás szinten a tükrözés módszerével szoktuk megoldani. Ennek lényege, hogy egy zárt tartomány peremén elhelyezkedő áram- vagy töltéeloszlás hatását a tartományon kívül található, megfelelően megválasztott erősségű és helyzetű „tükrőáramokkal” vagy „tükrőtöltésekkel” helyettesítjük. Ez az eljárás csak néhány speciális geometriájú felület (pl. síkok, gömb vagy henger) esetén működik, de most éppen ilyennel van dolgunk. Próbáljuk hát a szupravezető cső falában folyó áramok hatását egy, a csövön kívül elhelyezkedő, képzeletbeli, áramjárta egyenes vezetővel leírni!

Könnnyen látható, hogy a „tükrőáram” a cső belsejében lévő vezetékben folyó valódi árammal ellentétes irányú, ellenkező esetben a mágneses indukcióvektor sugárirányú komponense nem tűnhetne el a cső fala mentén. A szimmetria miatt a tükrőáram a cső tengelye és a valódi áramvezető által meghatározott síkban helyezkedik el. Jelöljük (általánosan) a valódi vezetőknek, illetve a tükrőáramnak a cső tengelyétől mért távolságát rendre d -vel és x -szel (az ennek megfelelő vektorok pedig legyenek $\mathbf{d}$ és $\mathbf{x}$). A tükrőáram egyelőre ismeretlen erősségét jelöljük nI -vel ($n > 0$).



2. ábra

Vizsgáljuk a szupravezető cső szimmetriatengelyre merőleges síkmetszetét, és írjuk fel belül a mágneses indukcióvektort az *ábra* jelöléseivel a cső tengelyéhez képest $\mathbf{R}$ vektorral jellemezhető pontban ($|\mathbf{R}| = R$)! A valódi áramvezető és a tükrőáram által keltett indukciójárulékok vektoros alakban:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2}, \quad \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 nI}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2},$$

ahol $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ a vezetékektől a vizsgált pontba mutató vektorok, $\mathbf{e}_z$ pedig a valódi vezetékben folyó árammal azonos irányú egységvektor. Azt szeretnénk elérni, hogy az eredő indukcióvektor (ami $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ vektori összege) érintőirányú legyen, amit matematikailag így fejezhetünk ki:

$$\mathbf{R}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = 0.$$

Ebbe behelyettesítve $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ korábbi kifejezését, majd egyszerűsítés után:

$$\frac{\mathbf{R}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_1)}{r_1^2} - \frac{n\mathbf{R}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_2)}{r_2^2} = 0.$$

A vegyes szorzatra vonatkozó $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ azonosságot felhasználva:

$$\mathbf{e}_z \underbrace{\left[\frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{R}}{r_1^2} - \frac{n\mathbf{r}_2 \times \mathbf{R}}{r_2^2} \right]}_{=0} = 0.$$

A szögletes zárójelben álló mindkét tag párhuzamos az $\mathbf{e}_z$ vektorral, ezért a skaláris szorzat csak úgy lehet zérus, ha a zárójeles mennyiség eltűnik. Fejezzük ki az $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ vektorokat $\mathbf{x}$ -szel és $\mathbf{d}$ -vel!

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \mathbf{x}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \mathbf{d}.$$

Ezzel a következő feltételt kapjuk:

$$\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{x}) \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}|^2} - \frac{n(\mathbf{R} - \mathbf{d}) \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R} - \mathbf{d}|^2} = \mathbf{0}.$$

A zárójeleket felbontva, majd $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ felhasználásával:

$$\mathbf{R} \times \left[\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}|^2} - \frac{n\mathbf{d}}{|\mathbf{R} - \mathbf{d}|^2} \right] = \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{R}$ vektor minden értékére ez csak úgy lehetséges, ha a szögletes zárójelben álló vektor nullvektor. Mivel $\mathbf{x}$ és $\mathbf{d}$ egyirányú vektorok, ezért ennek feltétele:

$$\frac{x}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}|^2} = \frac{nd}{|\mathbf{R} - \mathbf{d}|^2}.$$

Szorozzunk be a nevezőkkel, és fejtsük ki az abszolútérték-négyzeteket:

$$x(R^2 - 2\mathbf{R}\mathbf{d} + d^2) = nd(R^2 - 2\mathbf{R}\mathbf{x} + x^2).$$

Átrendezve:

$$xR^2 - ndR^2 + xd^2 - ndx^2 = 2(1 - n)(\mathbf{R}\mathbf{d})x.$$

Az egyenlet bal oldala nem függ az $\mathbf{R}$ vektor irányától, míg a jobb oldal igen. Ez az egyenlőség csak úgy állhat fenn $\mathbf{R}$ tetszőleges iránya esetén, ha $n = 1$, azaz az egyenlet mindkét oldala nulla. Ez azt jelenti, hogy a „tükörvezetékben” folyó áram ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú, mint a valódi vezetékben folyó áram.

Az $n = 1$ helyettesítéssel rövid számolás után végül a következő eredményt kapjuk a tükörvezeték helyzetére:

$$d = \frac{R^2}{x},$$

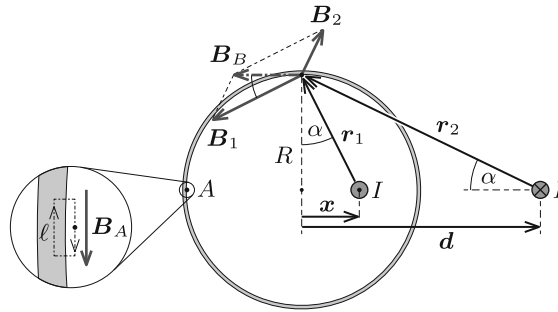
azaz $x = R/2$ esetén $d = 2R$.

a) A cső belsejében a mágneses mezőt a valódi és a „tükörvezeték” által keltett terek szuperpozíciójaként számolhatjuk. Az egyenes áramjárta vezetékre hosszegységenként ható f Lorentz-erő kiszámításakor tehát a tükörvezeték által a valódi vezeték helyén keltett mágneses teret kell figyelembe vennünk:

$$f = IB_2 = I \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(d - x)} = \frac{\mu_0 I^2}{3\pi R}.$$

Az erő taszító jellegű, a vezeték „igyekezne” a szupravezető cső közepén elhelyezkedni.

b) A feladat síkbelisége miatt a cső belső és külső falán egyaránt tengelyirányú áram folyik. A belső felületen folyó áram vonalmenti sűrűségét az Ampère-féle gerjesztési törvénnyel határozhatjuk meg. Ehhez tekintsük az A pont környékén a 3. ábrán látható, téglalap alakú zárt hurkot!



3. ábra

Ha a téglalap fallal párhuzamos oldala ℓ hosszúságú, akkor a gerjesztési törvény:

$$\ell B_A = \mu_0 J_A \ell,$$

hiszen a szupravezető anyagban a mágneses indukció értéke nulla. Ebből a J_A vonalmenti áramsűrűség:

$$J_A = \frac{1}{\mu_0} B_A,$$

és hasonló összefüggés igaz a cső belső falának bármely pontjára. Az A pontbeli indukcióvektor nagysága szuperpozícióval könnyen számolható a tüköráram segítségével:

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R + x)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(R + d)} = \frac{\mu_0 I}{6\pi R}.$$

Az A pont közelében tehát a cső belső falán a vonalmenti áramsűrűség:

$$J_A = \frac{I}{6\pi R}.$$

A B pontbeli indukcióvektor kiszámítása egy fokkal nehezebb, mert itt $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ nem párhuzamos irányú vektorok. A 3. ábrán látható α szög segítségével az eredő indukcióvektor nagysága:

$$B_B = B_1 \cos \alpha - B_2 \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \cos \alpha - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \sin \alpha.$$

Felhasználva, hogy $r_1 = R/\cos \alpha$, $r_2 = R/\sin \alpha$:

$$B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

A megjelenő szögfüggvényeket a 3. ábra segítségével kifejezhetjük:

$$\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ebből végül a B pontbeli indukció:

$$B_B = \frac{3\mu_0 I}{10\pi},$$

valamint a vonalmenti áramsűrűség:

$$J_B = \frac{3I}{10\pi}.$$

c) A cső belső felületén folyó árameloszlás önmagában elegendő ahhoz, hogy az indukcióvonalak behatolását a szupravezetőbe megakadályozza. Ennek az áramnak a teljes erőssége éppen I , amint az könnyen belátható, ha az Ampère-törvényt a cső falában futó körre alkalmazzuk. Ennek az áramnak (a cső véges mérete miatt) valahol vissza is kell folynia, az pedig csak a cső külső felületén lehetséges. A külső felületen folyó áram eloszlásának olyannak kell lennie, hogy a cső falában az indukció továbbra is zérus maradjon. Ez úgy lehetséges, hogy a külső felületen az árameloszlás egyenletes, vonalmenti áramsűrűsége $I/(2\pi R)$.

F3. a) A hatásfok definíciója alapján kifejezhetjük a belső Carnot-gép által felvett és leadott $J_m = \frac{Q_m}{\Delta t}$ és $J_h = \frac{Q_h}{\Delta t}$ hőteljesítményt az η hatásfokkal és a gép által leadott $P = \frac{W}{\Delta t}$ mechanikai teljesítménnyel:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{Q_m - Q_h}{Q_h} = \frac{J_m - J_h}{J_m} \\ P &= J_m - J_h \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} J_m &= \frac{P}{\eta}, \\ J_h &= \frac{P(1 - \eta)}{\eta}. \end{aligned}$$

Fourier hővezetési törvénye a meleg és a hideg oldalon így írható:

$$J_m = \kappa_m (T_m - t_m), \quad J_h = \kappa_h (t_h - T_h).$$

A hőáramokra kapott korábbi formulák, illetve a hővezetési egyenletek felhasználásával kifejezhetjük a belső t_m és t_h hőmérsékletet a külső T_m és T_h hőmérséklettel, a hatásfokkal, valamint a leadott mechanikai teljesítménnyel:

$$\begin{aligned} t_m &= T_m - \frac{J_m}{\kappa_m} = T_m - \frac{P}{\eta \kappa_m}, \\ t_h &= T_h + \frac{J_h}{\kappa_h} = T_h + \frac{P(1 - \eta)}{\eta \kappa_h}. \end{aligned}$$

A belső Carnot-gép hatásfokát a hőtartályok t_m és t_h hőmérsékletének ismeretében felírhatjuk, és így összefüggést kapunk η és P között:

$$\eta = 1 - \frac{t_h}{t_m} = 1 - \frac{T_h + \frac{P(1 - \eta)}{\eta \kappa_h}}{T_m - \frac{P}{\eta \kappa_m}},$$

ahonnan kifejezhető a keresett $P(\eta)$ függvény:

$$P(\eta) = \frac{\kappa_m \kappa_h}{\kappa_m + \kappa_h} \left(\eta T_m - \frac{\eta}{1 - \eta} T_h \right).$$

b) Ahogy növeljük a gépből kivett P mechanikai teljesítményt, nő a J_m és J_h hőáram is. Ha azonban ezek a hőáramok túl nagyok, akkor naggyá válik a külső és belső hőmérsékletek közötti $T_m - t_m$ illetve $t_h - T_h$ különbség, és a két belső hőmérséklet közel kerül egymáshoz, ami az η hatásfok, illetve a P teljesítmény csökkenéséhez vezet. Ez alapján látható, hogy van egy optimális η^* hatásfok, ami mellett a leadott P mechanikai teljesítmény maximális. A $P(\eta)$ függvény maximumánál a derivált zérus, tehát

$$P'(\eta^*) = \frac{\kappa_m \kappa_h}{\kappa_m + \kappa_h} \left[T_m - \frac{1}{(1 - \eta^*)^2} T_h \right] = 0,$$

ahonnan a keresett maximumhely:

$$\eta^* = 1 - \sqrt{\frac{T_h}{T_m}}.$$

Érdekes, hogy az eredmény független a hővezetési tényezőktől, és „csupán” a négyzetgyökjelben tér el a Carnot-gép hatásfokától.

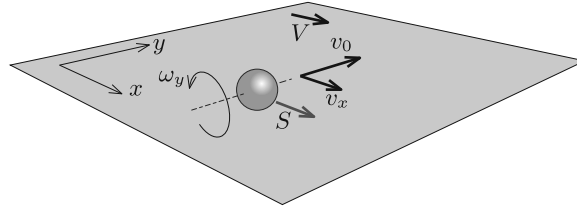
F4. Vezessünk be egy koordináta-rendszert, melynek x tengelye a futószalag sebességével azonos irányú, y tengelye pedig a labda kezdősebességének irányába mutat (4. ábra). Amikor a labda megérkezik a futószalagra, tömegközéppontjának x irányú sebességkomponense zérus, y irányú sebessége pedig a kezdeti v_0 érték:

$$v_x(t=0) = 0, \quad v_y(t=0) = v_0.$$

A labda kezdetben csak az x iránnyal párhuzamos tengely körül forog, a szögsebesség-vektor y komponense tehát nulla:

$$\omega_y(t=0) = 0.$$

A futószalagra érve a labdára az állandó nagyságú S csúszási súrlódási erő kezd hatni a futószalag sebességével megegyező irányban. A további mozgás során a súrlódási erő iránya mindig a labda legalsó pontjának a futószalaghoz viszonyított (relatív) sebességével ellentétes lesz.



4. ábra

A csúszási súrlódási erő kezdetben x irányban gyorsítja az m tömegű labda tömegközéppontját, így annak gyorsulása:

$$a = \frac{S}{m}.$$

Mivel az S erőnek forgatónyomatéka van a tömegközéppontra nézve, az R sugarú labda β szöggyorsulással forogni kezd az y iránnyal párhuzamos tengely körül a 4. ábrán feltüntetett irányban. A forgómozgás dinamikai egyenlete:

$$SR = \frac{2}{5} m R^2 \beta,$$

ahol felhasználtuk, hogy a labda tehetetlenségi nyomatéka $2mR^2/5$. Ebből meghatározható a labda szöggyorsulása:

$$\beta = \frac{5S}{2mR}.$$

Látszik, hogy a súrlódási erő csak a sebesség x komponensét és a szögsebességvektor y komponensét változtatja meg, a tömegközéppont y irányú sebességkomponensére és az x tengellyel párhuzamos tengely körüli forgómozgásra nincs hatással. Ebből következik, hogy a labda legalsó pontjának futószalaghoz viszonyított relatív sebessége mindvégig $-x$ irányú marad. Azaz a labdára ható csúszási súrlódási erőnek nem csak a nagysága, de az *iránya* is állandó!

A labda szalagra érkezésének $t = 0$ időpillanatától számítva meghatározható, hogyan függ a tömegközéppont $v_x(t)$ sebessége, valamint az $\omega_y(t)$ szögsebesség az időtől:

$$v_x(t) = at, \quad \omega_y(t) = \beta t.$$

A labda „oldalazó” csúszása közben $v_x(t)$ és $\omega_y(t)$ egyenletesen növekszik mindaddig, amíg elő nem áll a labda tiszta gördülése. Tiszta gördülésről akkor beszélhetünk, ha a labda futószalaggal érintkező pontjának nyugvó koordináta-rendszerben mért sebessége megegyezik a szalag V sebességével. Matematikailag megfogalmazva:

$$v_x(\tau) + \omega_y(\tau)R = V,$$

ahol τ a tiszta gördülés beálltának időpillanatát jelöli. A fenti egyenletből, valamint a szöggyorsulásra és a gyorsulásra kapott korábbi eredményekből τ kifejezhető:

$$\tau = \frac{2mV}{7S}.$$

A feladat kitűzésében szerepel, hogy a súrlódási együttható (és emiatt S is) igen nagy, így τ rövid időtartam. Vagyis a tiszta gördülés sokkal hamarabb beáll, mint amennyi idő alatt a labda átér a futószalag túlsó oldalára. A tiszta gördülés kialakulásától kezdve a labda tömegközéppontjának x irányú komponense állandó lesz, értéke:

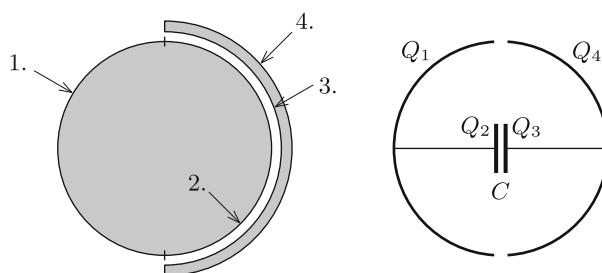
$$v_x(\tau) = a\tau = \frac{S}{m} \frac{2mV}{7S} = \frac{2}{7}V.$$

A labda tehát az asztalhoz képest $2V/7$ sebességgel egyenletesen mozog x irányban, így mire átér a szalag túloldalára,

$$d = \frac{2Vs}{7v_0}$$

utat tesz meg a szalaggal párhuzamosan, tehát ekkora mértékben tolódik el a pályája.

F5. a) Számozzuk meg a fémgömbhéjak főbb felületeit a 5. ábra bal oldala szerint! A feladatbeli elrendezés elektrosztatikus szempontból modellezhető az 5. ábra jobb oldalán látható rendszerrel. A Q_{1-4} töltések rendre az 1-4. felületeken levő töltéseknek feleltethetők meg.



5. ábra

A C kondenzátor fegyverzeteinek töltése ugyanakkora nagyságú, de ellentétes előjelű:

$$Q_2 = -Q_3.$$

A C kondenzátor kapacitása igen nagy, hiszen a 2. és 3. felületek nagyon közel vannak egymáshoz. Ezért, ha véges mennyiségű töltéssel rendelkezik a kondenzátor, a fegyverzetek közti feszültség elhanyagolhatóan kicsi marad, azaz a 2. és 3. felületek lényegében ekvipotenciálisak. A velük fémes kapcsolatban álló 1. és 4. felületek emiatt szintén ekvipotenciálisnak tekinthetők. Így az 5. ábra jobb oldalán látható C kondenzátoron kívül, de a gömbhéjakon belül az elektromos térerősség nulla, ami csak úgy lehetséges, ha az 1. és 4. felületek töltése megegyezik:

$$Q_1 = Q_4.$$

Tehát a Q_1 és Q_4 töltésekkel rendelkező félgömbök felületei összességében egy egyenletesen töltött gömbfelület megszokott gömbszimmetrikus terét hozza létre a felületeken kívül, míg belül a tér zérus.

Tudjuk továbbá, hogy a feladatban szereplő félgömbhéjra összesen Q töltést juttattunk, tehát fennáll:

$$Q_3 + Q_4 = Q.$$

A fémgömb össztöltése viszont nulla, amelyet a

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

egyenlet fejez ki. A fenti egyenletrendszert megoldva a következő töltésértékeket kapjuk:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{Q}{2}, & Q_2 &= -\frac{Q}{2}, \\ Q_3 &= \frac{Q}{2}, & Q_4 &= \frac{Q}{2}. \end{aligned}$$

Az eddigi eredmények alapján kiszámíthatjuk az 5. ábra bal oldalán látható felületek töltéssűrűségét. A feladatki-tűzésben szereplő fémgömb 1. és 2. felületeinek töltéssűrűségét:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{2\pi R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad \sigma_2 = -\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Míg a félgömbhéj külső és belső felületének együttes töltéssűrűsége:

$$\sigma_f = \frac{Q_3 + Q_4}{2\pi R^2} = \frac{Q}{2\pi R^2}$$

b) Ahhoz, hogy meghatározzuk, mekkora erővel hat egymásra a gömb és a félgömbhéj, meg kellene határoznunk, mekkora E_g teret hozna létre a gömbfelületen levő töltéselrendeződés, ha a félgömbhéj nem lenne ott. Ebben az E_g térben helyezkedik el ugyanis a félgömbhéj, amelyre a térrel arányos nagyságú Coulomb-erő hat.

Az E_g tér meghatározása érdekében vizsgáljuk meg a térerősséget félgömbhéj anyagának belsejében, vagyis a 3. és a 4. felület között! Ismert, hogy fémek belsejében az elektromos térerősség zérus, ez igaz a 3. és 4. felület közötti térrészben is. Itt a térerősséget három összetevő határozza meg az alábbi egyenlet szerint:

$$E_g + E_3 - E_4 = 0,$$

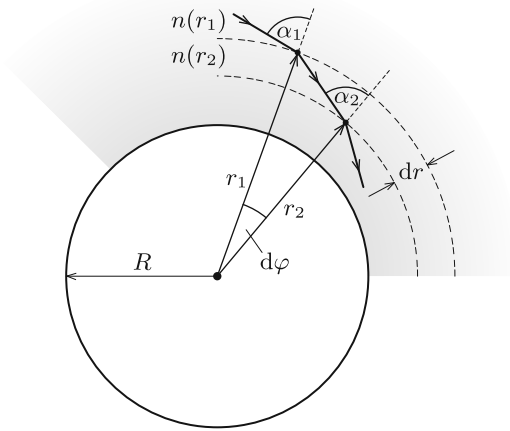
ahol E_g a fémgömb által keltett, egyelőre ismeretlen térerősség, E_3 a 3. felület által keltett tér, amely a 3. és 4. felületek közt sugárirányban kifelé mutat, továbbá E_4 a 4. felület járuléka, amely sugárirányban befelé mutat, így negatív előjellel kell figyelembe venni.

A fenti egyenletből a kérdéses E_g térerősség kifejezhető:

$$E_g = E_4 - E_3 = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} = 0,$$

ahol felhasználtuk azt a Gauss-törvényből következő tényt, hogy az E_3 és E_4 térerősségek a 3. és 4. felület töltéssűrűségeivel arányosak. Mivel azonban $\sigma_4 = \sigma_3$, így $E_g = 0$. A polarizált fémgömb tehát nem hoz létre elektromos teret a félgömbhéj helyén, így a két test között *nem* lép fel erő!

F6. Gondolatban osszuk fel a bolygó légkörét koncentrikus, vékony gömbhéjakra! Vizsgáljuk a fénysugarat, ahogy α_1 beesési szög alatt belép az r_1 sugarú, $dr = r_2 - r_1$ vastagságú gömbhéjba (6. ábra).



6. ábra

A gömbhéj külső felületén a törésmutató $n(r_1)$ -ről $n(r_2)$ -re változik, így a β_1 törési szög a Snellius-Descartes-törvénnyel számolható:

$$n(r_1) \sin \alpha_1 = n(r_2) \sin \beta_1.$$

A β_1 szög kifejezhető azzal az α_2 beesési szöggel is, amely alatt a fénysugár az r_2 sugarú gömbhéjhoz ér:

$$\beta_1 = \alpha_2 - d\varphi,$$

ahol $d\varphi$ a sugár 6. ábrán látható kis szögelfordulása. A fenti két egyenlet, valamint a két szög összegének szinuszára vonatkozó azonosság felhasználásával a következőt kapjuk:

$$n(r_1) \sin \alpha_1 \approx n(r_2) \sin \alpha_2 (1 - d\varphi \cot \alpha_2).$$

Az ábráról leolvasható még az $r_1 d\varphi \cot \alpha_2 \approx r_1 - r_2$ geometriai összefüggés. Ennek segítségével megkapjuk a „gömbi Snellius-Descartes-törvényt”:

$$n(r_1) r_1 \sin \alpha_1 = n(r_2) r_2 \sin \alpha_2.$$

Megjegyzés: Ez az egyenlet abból a tényből is levezethető, hogy közeget határon a fény hullámszámvektorának felülettel párhuzamos komponense nem változik meg, így a fény (bolygó középpontjára vonatkoztatott) „impulzusnyomatéka” állandó.

a) A feladatban $n(r) = n_0 R/r$, azaz a fény beesési szöge állandó marad a közeghatárokon. Ez azt jelenti, hogy a fénysugár pályájának érintője állandó, $90^\circ - \theta$ szöget zár be a sugárral; a fény trajektóriája tehát *logaritmikus spirál*.

b) A fény terjedési sebessége a bolygó középpontjától r távolságra:

$$v(r) = \frac{c}{n(r)} = \frac{c}{n_0 R} r,$$

így a sebesség radiális komponense $-v(r) \sin \theta$. A felszín eléréséhez szükséges időt tehát a következő integrál adja meg:

$$t = \int dt = \int_{R+h_0}^R \frac{dr}{-v(r) \sin \theta} = \frac{n_0 R}{c \sin \theta} \int_R^{R+h_0} \frac{dr}{r}.$$

Az integrálást elvégezve végül a következő eredményt kapjuk:

$$t = \frac{n_0 R}{c \sin \theta} \ln \frac{R+h_0}{R} \approx \frac{n_0 h_0}{c \sin \theta},$$

ahol az utolsó lépésben feltételeztük, hogy $h_0 \ll R$.

c) Írjuk fel a φ szög $d\varphi/dt$ változási ütemét:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v(r) \cos \theta}{r} = \frac{c \cos \theta}{n_0 R},$$

amely állandó. A feladat szövege szerint a rádiuszvektor $2\pi N$ szöggel fordul el a felszín eléréséig (itt N egész szám), a felszín eléréséig szükséges t időt korábban meghatároztuk, így:

$$\frac{2\pi N}{t} = \frac{c \cos \theta}{n_0 R}.$$

A t -re kapott korábbi eredményt felhasználva $\tan \theta$ kifejezhető:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2\pi N} \ln \frac{R+h_0}{R} \approx \frac{1}{2\pi N} \frac{h_0}{R}.$$

Megjegyzés. Természetesen akkor is az indítási pont alatt éri el a lézersugár a bolygó felszínét, ha sugárirányban indítjuk ($\theta = 90^\circ$). Formálisan megkapjuk ezt a megoldást is az $N = 0$ helyettesítéssel.

**Sarkadi Tamás, Szász Krisztián, Tasnádi Tamás,
Vankó Péter és Vigh Máté**