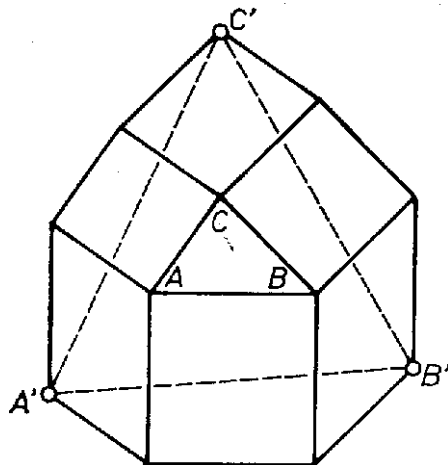


Ebben a rovatban havonként tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

1. Adott a síkban 6 pont: $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ úgy, hogy a $\overrightarrow{P_i P_k}$ párhuzamos és egyirányú a $\overrightarrow{Q_k Q_i}$ -ral ($i = 1, 2, 3$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $P_1 Q_1, P_2 Q_2, P_3 Q_3$ egyeneseknek van közös pontja.

2. Az ABC háromszög mindegyik oldala fölé, kefelé szerkesszünk négyzetet, majd a háromszög csúcsainál adódó két-két szakaszt egészítsük ki paralelogrammává. A paralelogrammák új csúcsai legyenek rendre A', B' és C' .



Igazoljuk, hogy

- az ABC háromszög és az $A'B'C'$ háromszögek súlypontja egybeesik;
- az $A'B'C'$ oldalai áthaladnak egy-egy négyzet középpontján;
- az AA' merőleges a BC oldalra.

3. Legyen ABC szabályos háromszög, továbbá legyenek $AA_1 A_2, BB_1 B_2, CC_1 C_2$ egyező körüljárású szabályos háromszögek. Az $A_2 B_1, B_2 C_1, C_2 A_1$ szakaszok felezőpontjai X, Y, Z . Mutassuk meg, hogy XYZ is szabályos háromszög.

4. Legyenek A, B, C, D és E egy sík pontjai. Jelöljük T_{XYZ} -vel az XYZ háromszög előjeles területét (azaz ha X, Y, Z ebben a sorrendben pozitív körüljárású, a háromszög területe pozitív, az ellenkező esetben negatív.) Bizonyítsuk be, hogy

$$T_{EAB} \cdot T_{BCD} + T_{EAD} \cdot T_{EBC} = T_{EAC} \cdot T_{EBD}.$$

5. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ egy síkban levő vektorok összege $\mathbf{0}$. Mutassuk meg, hogy

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|.$$

6. Adott a síkban n egységvektor úgy, hogy összegük $\mathbf{0}$. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq k \leq n$ -re kiválasztható közülük k darab úgy, hogy ezek eredőjének hossza legfeljebb 3.

7. Adott néhány vektor a síkban, melyek hosszainak összege pontosan 4. Bizonyítandó, hogy kiválasztható közülük néhány, melyek eredőjének hossza legalább 1.

8. a.) Egy tetraéder súlyvonalai egyenlő hosszúak. Igazoljuk, hogy ekkor a szemközti élek is egyenlő hosszúak.

b.) Egy tetraéder súlyvonalai merőlegesek a szemközti lapra. Igazoljuk, hogy a tetraéder szabályos.

9. a.) Két páros oldalszámú konvex sokszög oldalfelező pontjai egybeesnek. Bizonyítsuk be, hogy területük egyenlő.

b.) Egy konvex n -szög területe T , az oldalfelező pontok által meghatározott n -szög területe F . Az oldalakat p/q arányban osztjuk ($p + q = 1$), az osztópontok által meghatározott n -szög területe S . Bizonyítsuk be, hogy

$$S = (p + q)^2 T + 4pqF.$$

10. Egy háromszög köré írt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, továbbá $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Fejezzük ki a λ -k arányát a háromszög szögeivel.

Ajánlott irodalom: Reiman István: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon; Reiman István: Vektorok a geometriában; (Középisk. Szakköri Füzet, Tankönyvkiadó, 1971 Bp.); Lukács Ottó: Koordináta-geometria vektorokkal a síkban és a térben; Skljarszkij-Csencov-Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi geometria köréből, Geometria II. (Planimetria) (Tankönyvkiadó 1972 Bp.)