

Mostani számunktól kezdve havonként tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot fogunk ebben a rovatunkban elmondani, amelyek a matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldásait **nem** kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatmegoldásokkal kapcsolatos mindennemű kérdéseikkel, forduljanak a szerkesztőséghez. A kérdésekre levélben válaszol a rovatvezető.

1. Legyenek a és b pozitív egész számok. Igazoljuk, hogy

$$2 \cdot \sqrt[a+b]{a^{2b} \cdot b^{2a}} \leq a^2 + b^2.$$

2. Legyenek a, b, c pozitív számok. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

- a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$,
- b) $abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$,
- c) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

3. Tudjuk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$-1/2 \leq ab + bc + ca \leq 1/2.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokra

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

5. Jelöljük az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számok mértani közepét G_n -nel. Igazoljuk, hogy

$$a_n \geq nG_n - (n-1)G_{n-1}.$$

6. Igazoljuk, hogy ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számok szorzata 1, akkor

- a) $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$,
- b) $(1+a_1)(2+a_2)\dots(n+a_n) \geq n^{n/2}$.

7. Legyenek $a_i > 1$ valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

8. Az $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$, valamint $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0$ valós számokról tudjuk, hogy

$$a_1 \geq b_1; \quad a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2; \dots; a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor $a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k \geq b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k$ minden k természetes számra.

9. A p és q adott pozitív számok, továbbá $p \leq a$, b , $c \leq q$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

10. Mutassuk meg, hogy ha $x_i > 0$ és $x_i y_i - z_i^2 > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), akkor

$$\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i - z_i^2}.$$

Ajánlott irodalom: Késedi Ferenc: Egyenlőtlenségek,
Skljarszkij, Csencov, Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. rész Aritmetika és algebra.