

I. rész

1. a) Oldjuk meg a $\sqrt{2x+6} = 9-x$ egyenletet a valós számok halmazán. (5 pont)

b) Oldjuk meg a $\log_{0,3} x \geq \log_{0,3} \frac{4}{9}$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. (3 pont)

c) Oldjuk meg a $\sin^2 4x + \sin 4x + \cos^2 4x = 2$ egyenletet a $[0; \pi]$ halmazon. (4 pont)

2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $y + 2x = x^2$ egyenletű parabola.

a) Írjuk fel a parabola $E(2; 0)$ pontjában húzott érintő egyenletét. (3 pont)

b) Számítsuk ki a parabola tengelypontjának koordinátáit és határozzuk meg a parabola paraméterét. (4 pont)

A koordináta-rendszerben a $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 8)$ és $(-4; 8)$ csúcspontokkal megadott téglalapot a fenti parabola három részre vágja.

c) Mekkora a középső rész területe? (6 pont)

3. a) Egy mértani sorozat 1011-edik tagja megegyezik a sorozat nullától különböző hányadosával. Számítsuk ki a sorozat első 2019 tagjának a szorzatát. (6 pont)

b) Jelölje x és y ebben a sorrendben egy mértani sorozat két egymást követő tagját. Tudjuk, hogy $x \neq 0$ és az $(x; y)$ számpár megoldása a

$$100^x - 2 \cdot 10^x \cdot 10^{2y} + 10^{4y} \leq 0$$

egyenlőtlenségnek. Számítsuk ki a sorozat hányadosát. (6 pont)

4. A VONALAZÓ nevű játékot két ember játszhatja.

A játék menete

Egy papírlapra a játékosok néhány pontot rajzolnak. A kezdő játékos húz egy vonalat valamelyik pontból egy másik pontig, és a vonalra egy újabb pontot rajzol. Így ebből az új pontból két vonal indul ki. A két játékos felváltva húzza a vonalakat a pontok között és a játékos a megrajzolt vonalra mindig egy új pontot rajzol a következő szabályok betartásával:

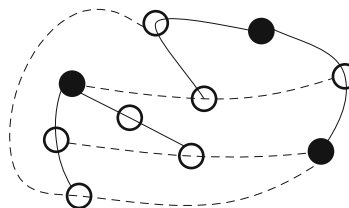
- Mindegyik vonal alakja tetszőleges lehet, de nem metszheti önmagát és nem metszhet egyetlen korábban megrajzolt vonalat sem.
- Az összekötő vonal két pontot köt össze és nem mehet át más korábban megrajzolt ponton.
- Két pontot csak egyetlen vonal köthet össze.
- Egyetlen pontból sem indulhat ki háromnál több vonal.

Az veszít, aki már nem tud húzni egy vonalat sem.

a) A 4.1. ábrán 3 pont látható. Rajzoljuk bele az ábrába – a fenti feltételek figyelembevételével – annak a játéknak az egyes lépéseit, amelyben pontosan 4 új pont szerepel. A kezdő játékos vonala legyen folytonos, az ellenfél pedig szaggatott. Az új pontokat üres karikával jelölje. (3 pont)



4.1. ábra



4.2. ábra

A 4.2. ábrán egy játszma lépéseit lehet nyomon követni. A kezdő játékos vonalait a folytonos, az ellenfél lépéseit pedig a szaggatott vonalak jelzik.

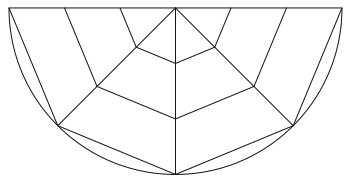
b) Számozzuk be az üres karikával jelzett új pontokat a keletkezésük sorrendjében és döntsük el, melyik játékos nyerte a játszmát. (4 pont)

Levente Csabával már nagyon sokszor játszott a VONALAZÓ nevű játékot. Annak a valószínűsége, hogy Levente 10 játékból legalább 8-at megnyer kétszer akkora, mint annak, hogy pontosan 8-at nyer meg. (Tételezzük fel, hogy Levente mindegyik játszmában ugyanakkora valószínűséggel nyer.)

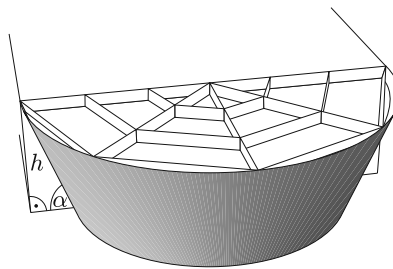
c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Levente megnyer egy játszmát? (7 pont)

II. rész

5. Egy zöldségárus a friss áruját a pulton félkörívben helyezi el. Az egyes tartományokat falécek határolják. A félkör az 5.1. ábrán látható módon négy egybevágó körcikkre van osztva. Az ábrán látható összes egyenes szakasz és a félkörív is falécből készült. A szomszédos sugarakat összekötő elválasztó lécek párhuzamosak és három egyenlő részre osztják a sugarakat. A félkör sugara 1,5 méter.



5.1. ábra



5.2. ábra

a) Hány méter falécre van szükség a pult kialakításához? Válaszunkat egészszre kerekítve adjuk meg. (8 pont)

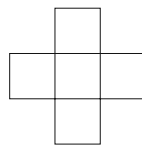
Egy másik zöldségesnek megtetszett az ötlet és bódéjához egy félbevágott csonkakúp alakú bővítvényt tervezett az ábra szerint, ahol h a bővítvény magasságát, α pedig a félbevágott csonkakúp bódéval érintkező alkotójának a bódé alsó, vízszintes élével bezárt szögét jelöli. A bővítvény méretei: $h = 100$ cm, $\alpha = 70^\circ$, a felső kör sugara pedig 1,5 m (5.2. ábra).

b) Mennyi anyag szükséges a szürkével jelölt palástrész beborításához, ha az illesztések miatt plusz 4% anyaggal kell számolni? Válaszunkat tized négyzetméterre kerekítve adjuk meg. (8 pont)

6. Egy 8×8 -as sakktábla mezőire 1-től 64-ig beírtuk a természetes számokat a 6.1. ábra szerint. Ezután készítettünk egy olyan alakzatot, amely 5 darab, a sakktábla mezőivel egybevágó négyzetből áll (6.2. ábra). Az így elkészített alakzatot véletlenszerűen ráhelyezzük a sakktáblára úgy, hogy annak mind az öt négyzete lefedjen egy-egy mezőt a táblán.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

6.1. ábra



6.2. ábra

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lefedett számok összege osztható 3-mal? (6 pont)

Egy másik alkalommal a sakktábla mezőire 64 pozitív egész számot írtunk. Közülük az egyik egyjegyű, a többi kétjegyű szám. Tudjuk, hogy a felírt számok mediánja és egyetlen módusza a 68, ami kétszer szerepel a táblán. Tudjuk továbbá, hogy a számok átlaga 67,5, a terjedelmük pedig 93.

b) Mely számok szerepelnek a táblán? (10 pont)

7. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(11; -2)$ és a $B(2; 1)$ pontokat összekötő szakasz, továbbá az $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$ egyenletű kör. Az AB szakaszt a koordináta-rendszer origója körül $+90^\circ$ -kal elforgatjuk.

a) Számítással igazoljuk, hogy a forgatással kapott szakasz egy pontban metszi a megadott kört. (4 pont)

Egy r és R sugarú kör kívülről érinti egymást. A körök középpontjain áthaladó egyenes ezeket a köröket az érintési ponton kívül az A és B pontokban metszi. Az egyik közös külső érintő érintési pontjai E és F .

b) Igazoljuk, hogy az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. (6 pont)

c) Számítsuk ki a közös külső érintőszakasz hosszát. (6 pont)

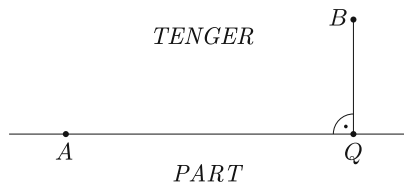
8. Egy szabadulósobának három bejárata van. Egy 6 fős társaság tagjai bármelyik ajtón, de csak kettesével léphetnek be. A belépés sorrendje nem számít.

a) Hányféle módon juthatnak be a szobába a társaság tagjai? (4 pont)

A szabadulósoba egyik feladata így szólt: adott tíz látszólag egyforma lakat illetve tíz kulcs. Mindegyik lakatra igaz, hogy pontosan egy kulcs nyitja. A játékszabály szerint a játékosnak mind a 10 lakatot ki kell nyitnia. Nevezzük próbálkozásnak egy kulcs és egy lakat összeillesztését, akár nyitja a kulcs a lakatot, akár nem.

b) Módszeresen dolgozva legfeljebb hány próbálkozás kell a feladat megoldásához? (3 pont)

Egy „túlélő” műsorban az egyik feladat az volt, hogy a lehető leggyorsabban jussanak el a versenyzők a tengerparton lévő A pontból a tengeren lévő B pontba, mert akkor védettséget szereznek a következő megmérettetésre. Tudjuk, hogy a parton csak futhatnak, a tengerben csak úszhatnak, segédeszközöket (farönk, evező stb.) nem használhatnak.



Az ábra szerint a pálya méretei: $AQ = 4$ km, $BQ = 1$ km, valamint $AQB \angle = 90^\circ$. (A partvonalat az egyszerűség kedvéért tekintjük egyenesnek.) Az egyik versenyző 8 km/óra sebességgel képes futni a homokban és 2 km/óra sebességgel úszni a tengerben.

c) Hány km futás után ugorjon a versenyző a tengerbe, ha a lehető legrövidebb időn belül szeretne eljutni A -ból B -be? (9 pont)

9. Egy öttagú család (apa, anya és a három gyerek) életkorának összege ebben az évben 100 év. Az anya 6 évvel fiatalabb a férjénél. 6 év múlva a középső gyerek kétszerannyi idős lesz, mint most. Amikor a legkisebb gyerek született, abban az évben (a kicsi megszületése előtt) a négytagú család átlagéletkora 22,5 év volt. Az anya az első gyermekét 22 éves korában szülte.

a) Hány éves most az anyuka? (7 pont)

Vasárnap délután a családtagok egy új társasjátékot próbálnak ki. A társasjáték játéktábláján 100 mező kapcsolódik egymás után, melyeket a tervezők 1-től 100-ig megszámoztak. A táblán a második mezőtől kezdve minden 2. mező zöld színű (a többi fehér), a harmadik mezőtől kezdve minden 3. mezőn egy állat képe, a negyedik mezőtől kezdve minden 4. mezőn egy fa képe, és az ötödik mezőtől kezdve minden 5. mezőn egy vadászház képe látható. A játékszabály szerint, ha egy mezőn két figura szerepel, akkor az erre a mezőre lépő játékos egyszer kimarad a játékból.

b) Hány olyan fehér színű mező van a táblán, amelyre lépve a játékos egyszer kimarad a játékból? (3 pont)

A társasjáték játékszabálya szerint a játékosok egy fehér és egy sárga színű szabályos dobókockával dobnak egyszerre, és a lépésük száma a dobott számok összege. Ha a dobás összege 6, akkor a játékosok újra dobhatnak, és a lépések száma a játékos által dobott négy szám összege lesz. (Például: Ha a játékos első dobása 2 és 5 volt, akkor a 7-es mezőre lép. Ha viszont a játékos első dobása 2 és 4, az új dobása 3 és 5 volt, akkor a játékos a 14-es mezőre léphet.) Ha egy mező sorszáma 10-zel osztható, akkor erre rálépve, a játékos a bábujával visszalép a legközelebbi, fát ábrázoló mezőre.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első játékos bábujá kezdéskor a 10-es mezőre lép? (Kezéskor a játékosok bábui az 1-es mező előtt állnak.) (6 pont)