

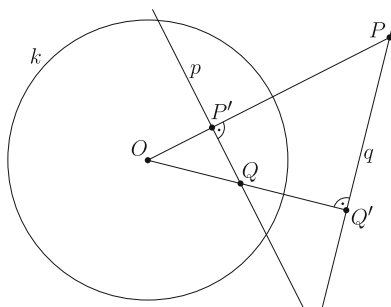
A körre vonatkozó polaritás

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A *polaritások* olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések, amelyek a projektív sík pontjait a projektív sík egyeseivel párosítják össze úgy, hogy bármely e egyenesre és P pontra igaz, hogy az e akkor és csak akkor megy át P -n, ha az e -nek megfelelő E pont illeszkedik a P -hez rendelt p egyenesre. A P ponthoz rendelt p egyenes a P *polárisa*, és a p egyeneshez rendelt P pont a p *pólusa*. Praktikus dolog az egymásnak megfeleltetett objektumokat ugyanazzal a betűvel jelölni, a pontokat nagy-, az egyeneseket kisbetűvel.

Most a polaritás legismertebb, középiskolás versenyfeladatokban is gyakran előforduló speciális esetével, a *körre vonatkozó polaritással* fogunk foglalkozni.

Két lehetséges definíció



1. ábra

Legyen k egy rögzített kör, ez lesz a polaritás *alapköre*; a középpontja O , sugara ρ . A k -ra vonatkozó polaritást fogjuk definiálni.

Két lehetséges definíciót is szeretnék mutatni. Az első egy intuitív mód, ahogy az ember először maga fedezné fel a polaritás alaptulajdonságait, cserébe több technikai részletkérdést később kell végiggondolnunk. A második egy technikailag egyszerűbb, kompaktabb definíció, cserébe a geometriai tulajdonságokat kell külön ellenőrizni. Mindkét definíció lépéseit követhetjük az 1. ábrán.

1. definíció

- 1a. Tetszőleges, O -tól különböző P pont k -ra vonatkozó inverze legyen P' . A P pont *polárisa* a P' -n átmenő, OP -re merőleges p egyenes.
- 1b. A P, Q pontok *konjugáltak*, ha rajta vannak egymás polárisán.
- 1c. Ha a p egyenes nem megy át az O ponton, és O merőleges vetülete p -re a P' pont, akkor p *pólusa* a P' k -ra vonatkozó inverze.
- 1d. A p, q egyenesek *konjugáltak*, ha átmennek egymás pólusán.

2. definíció

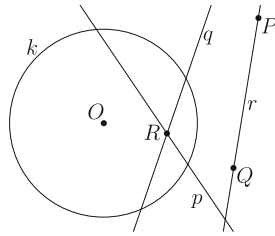
- 2a. A P és Q pontok *konjugáltak*, ha $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \rho^2$.
- 2b. A P pont *polárisa* a P -vel konjugált pontok halmaza, avagy az $\vec{OP} \cdot \vec{OX} = \rho^2$ egyenletű egyenes.
- 2c. A p egyenes *pólusa* az az egyértelmű P pont, amely p összes pontjával konjugált.
- 2d. A p, q egyenesek *konjugáltak*, ha átmennek egymás pólusán.

Tetszés szerint, tekinthetjük az 1a–1d. tulajdonságokat definíciónak és a 2a–2d. tulajdonságokat következményeknek, vagy fordítva. A polaritás néhány további alaptulajdonsága:

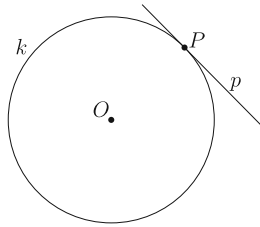
3. A P pont polárisa akkor és csak akkor a p egyenes, ha p pólusa P .
4. A P pont akkor és csak akkor van rajta a Q pont polárisán, ha Q rajta van P polárisán (1. ábra).

¹ A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

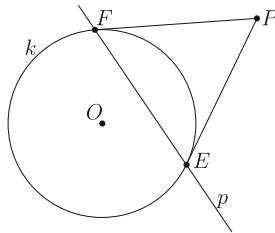
- 5a. Ha a P és Q pontok polárisa p , illetve q , akkor az $r = PQ$ egyenes pólusa p és q metszéspontja, R (2a. ábra).
- 5b. Ha a p és q egyenesek pólusa P , illetve Q , akkor az R metszéspontjuk polárisa az $r = PQ$ egyenes (2a. ábra).
- 6a. Ha P az alapkörön van, akkor a polárisa a körhöz P -ben húzott érintő (2b. ábra).
- 6b. Ha p érinti az alapkört, akkor a pólusa az érintési pont (2b. ábra).
7. Ha a P pont kívül van, és a P -ből k -hoz húzott érintők PE és PF , akkor P polárisa az EF egyenes (2c. ábra).
- 8a. Bármely pont akkor és csak akkor konjugált önmagával, ha az alapkörnek pontja (2b. ábra).
- 8b. Bármely egyenes akkor és csak akkor konjugált önmagával, ha érinti az alapkört (2b. ábra).



2a. ábra



2b. ábra

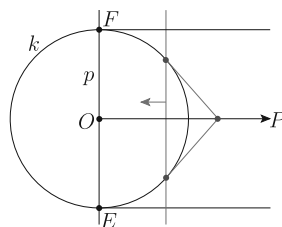


2c. ábra

Az Olvasóra bízunk annak végiggondolását, hogy a kétféle definíció ugyanazt a megfeleltetést írja le, és a fenti tulajdonságok is teljesülnek.

Kiterjesztés a projektív síkra

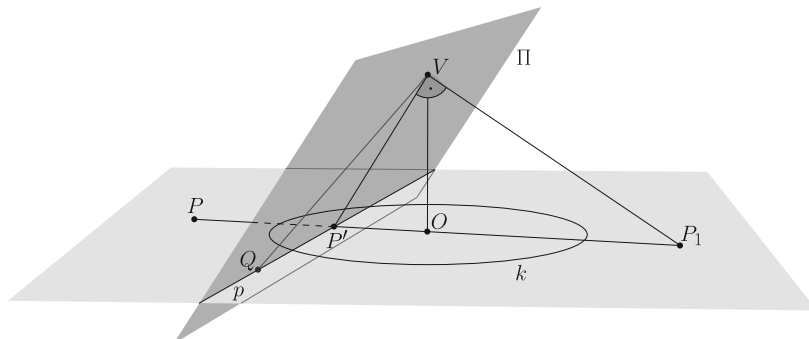
Ha a síkot kiegészítjük a szokásos végtelen távoli pontokkal és az azokat tartalmazó ideális egyenessel, akkor definiálhatjuk az O pont polárisát és az O -n átmenő egyenesek pólusait is. Ha P egy ideális pont, akkor P polárisa az O -n átmenő, az OP irányra merőleges egyenes. Ez szemléletesen megfelel annak, hogy ha a P pontot valamelyik irányban végtelen messzire elmozgatjuk, akkor a polárisa is párhuzamosan mozog az O pontra illeszkedő helyzetig. A 7. tulajdonság is érvényes marad; a határhelyzetben a P -ből húzott érintők párhuzamosak az OP iránnyal (3. ábra).



3. ábra

Végül az O pont polárisa az ideális egyenes; ezt is szemléltethetjük úgy, hogy a P pontot az O -ba húzzuk, miközben P polárisa egyre távolabbra vándorol.

Térbe kilépve egységessé tehetjük a sokféle definíciót. Vegyünk fel egy V pontot a térben, amelyre az OV szakasz merőleges k síkjára, és a hossza ϱ . Tekintsünk egy tetszőleges, O -tól különböző P pontot a síkban, a k -ra vonatkozó inverze legyen P' , a polárisa pedig p ; legyen továbbá P tükörképe az O pontra P_1 , és legyen Π a V -re és p -re illeszkedő sík (4. ábra).



4. ábra

Mivel $OP_1 \cdot OP' = OP \cdot OP' = \varrho^2 = OV^2$, az $OV P_1$ háromszög hasonló az $OP' V$ háromszöghöz, emiatt $P'VP_1 = 90^\circ$. A p egyenes merőleges OP -re és OV -re, ezért merőleges az $OV P$ síkra és az abban fekvő VP_1 egyenesre is. A Π síkban most már két egyenesről, p -ről és VP' -ről is tudjuk, hogy merőleges VP_1 -re, tehát a Π sík merőleges a VP_1 egyenesre.

Ez az észrevétel egy térbeli eljárást ad a P pont polárisának szerkesztésére: tükrözzük P -t O -ra, így megkapjuk a P_1 pontot. A V -ponton át, VP_1 -re merőlegesen vegyünk fel a Π síkot; a Π kimetszi az alapsíkból a p egyenest. Azt is láthatjuk, hogy bármely Q pont akkor és csak akkor konjugált P -vel, ha $P_1VQ \angle = 90^\circ$.

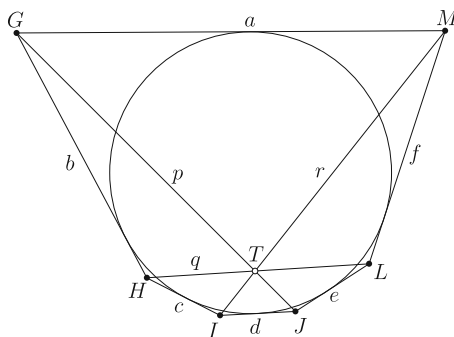
Ha P valamelyik ideális pont, akkor $P_1 = P$, az OP irány párhuzamos az alapsíkkal, és Π kimetszi az O -n átmenő, OP -re merőleges egyenest. Ha pedig $P = O$, akkor Π párhuzamos k síkjával, a két sík metszete valóban az alapsík ideális egyenese. Tehát a fenti szerkesztés egységesen működik a projektív sík bármely pontjára.

Dualitás

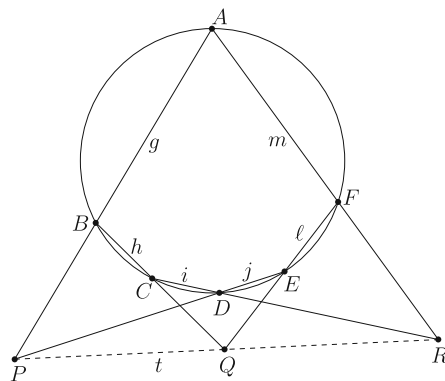
Ha van egy projektív geometriai állítás, tétel, amelyben pontok, egyenesek és (legfeljebb) egy kör szerepel, az ábrára alkalmazhatjuk a körre vonatkozó polaritást: minden pontot kicserélünk a polárisára, és minden egyenest kicserélünk a pólusára. Ilyen módon a projektív geometriai tételeket párokba állíthatjuk; mindegyik tételnek van egy párja, *duálisa*.

Próbáljuk ki ezt az első részben látott Brianchon-tétellel:

Brianchon tétele: Ha az a, b, c, d, e, f egyenesek érintik a k kört, metszéspontjaik $a \cap b = G, b \cap c = H, c \cap d = I, d \cap e = J, e \cap f = L$ és $f \cap a = M$, akkor a $p = GJ, q = HL$ és $r = IM$ egyenesek egy ponton (T) mennek át (5a. ábra).



5a. ábra



5b. ábra

A polaritást alkalmazva kapjuk a Pascal-tételt:

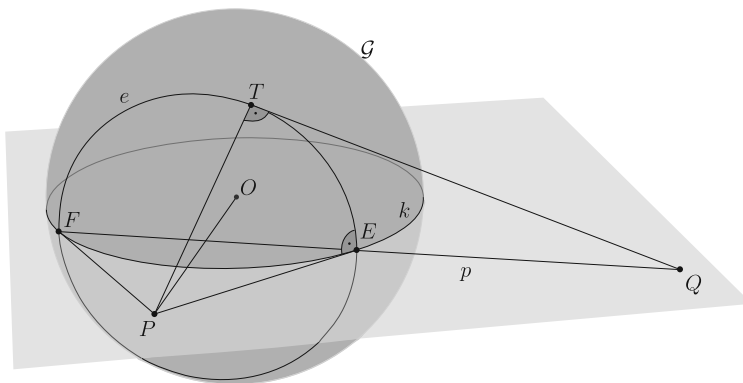
Pascal² tétele: Ha az A, B, C, D, E, F pontok egy körön vannak, az összekötő egyenesek $AB = g, BC = h, CD = i, DE = j, EF = l$ és $FA = m$, akkor ezek metszéspontjai, a $g \cap j = P, h \cap l = Q$ és $i \cap m = R$ pontok egy egyenesen (t) vannak (5b. ábra).

A Brianchon-tétel és a Pascal-tétel egymás duálisa.

Konjugált pontpárok egy térbeli jellemzése

Legyen $\mathcal{G}$ az O középpontú, az alapkörre illeszkedő gömb, és vegyünk fel két pontot, P -t és Q -t a síkban, a körön kívül; a P -ből k -hoz húzott érintők végpontjai legyenek E és F . A 7. tulajdonság szerint a $p = EF$ egyenes a P pont polárisa. A PO egyenesre a p mentén állítsunk egy merőleges síkot; ez a $\mathcal{G}$ -t egy e körben metszi; az e merőleges a PE és PF szakaszokra.

Ha Q rajta van a p egyenesen, vagyis P és Q konjugáltak, akkor a Q pont is az e kör síkjában van, a körön kívül. Húzzuk meg Q -ból az e egyik érintőjét; az érintési pontot jelöljük T -vel. Vegyük észre, hogy a PT és a QT szakasz is érintője $\mathcal{G}$ -nek, ezért a PQT sík érinti a gömböt. Továbbá a PT szakasz a PE elforgatottja, szintén merőleges e -re és a körhöz húzott QT érintőre, tehát a PT és QT szakaszok merőlegesek (6. ábra).



6. ábra

Végig lehet gondolni, hogy ezek a lépések megfordíthatók: ha egy, a P és Q pontokon keresztül fektetett sík a T pontban érinti a gömböt úgy, hogy PT és QT merőlegesek, akkor Q a p egyenesre esik, vagyis P és Q konjugáltak. Melléktermékként a 4. tulajdonságra is egy új bizonyítást adtunk, legalábbis külső pontok esetén.

Autopoláris háromszögek

Azokat a háromszögeket, amelyekben mindegyik csúcs a vele szemközti oldal pólusa, *autopoláris háromszögnek* hívjuk, de van, aki a görög–angol *autopolar* név betű szerinti átírását szereti. Bármely két konjugált P, Q pont kiegészíthető autopoláris háromszöggé, a harmadik, R csúcs a PQ egyenes pólusa, amely P -vel és Q -val is konjugált. Például a P ponttal Q és R is konjugált, ezért P polárisa csak a QR egyenes lehet.

Az autopoláris háromszögeknek egy nagyon fontos előfordulása, versenyfeladatok megoldásában is gyakran találkozhatunk vele, amikor egy hűrnégyszög szemközti oldalpárjainak és átlóinak metszéspontját vesszük:

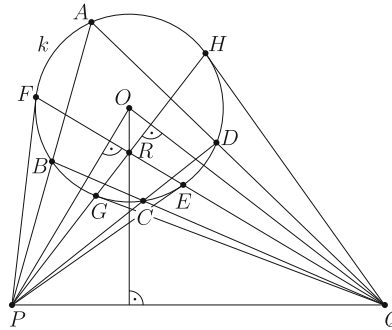
²Blaise Pascal (1623–1662) francia matematikus és filozófus

Tétel. (a) Ha A, B, C és D négy különböző pont a k körön, AB és CD metszéspontja P , BC és AD metszéspontja Q , továbbá AC és BD metszéspontja R , akkor a PQR háromszög k -ra nézve autopoláris.

(b) A PQR háromszög magasságpontja a k középpontja (7. ábra).

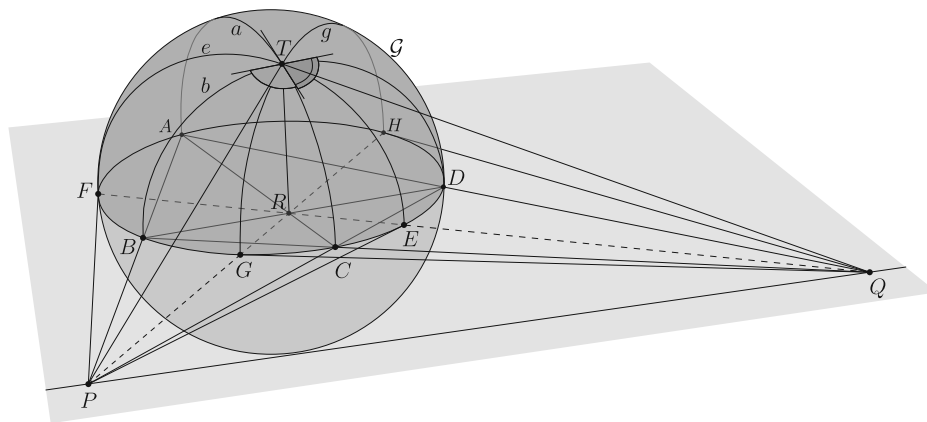
A tétel (b) része triviálisan következik az (a) állításból: ha PQR autopoláris háromszög, akkor például a QR egyenes a P pont polárisa, ami az 1a. tulajdonság miatt merőleges az OP egyenesre, tehát a PQR háromszögben OP a QR oldalhoz tartozó magasságvonal. Ugyanez a másik két oldalra is elmondható, tehát O a három magasságvonal metszéspontja.

Az (a) részt a térbe kilépve fogjuk igazolni. Az A, B, C, D pontok szerepe szimmetrikus; feltehetjük, hogy $ABCD$ egy konvex húrnégyszög, így P és Q a körön kívül, R pedig a körön belül helyezkedik el.



7. ábra

A P -ből és Q -ből a körhöz húzott érintők legyenek PE, PF, QG és QH , és legyen $\mathcal{G}$ az O középpontú, k -ra illeszkedő gömb. Az AC és BD átlókra illeszkedő, az alapsíkra merőleges síkok metsszék $\mathcal{G}$ -t az a és b körvonalak mentén, és ezek egyik metszéspontja legyen T . Mivel az ACT és a BDT sík is merőleges a k síkjára, a T pont merőleges vetülete a síkra az R pont (8. ábra).



8. ábra

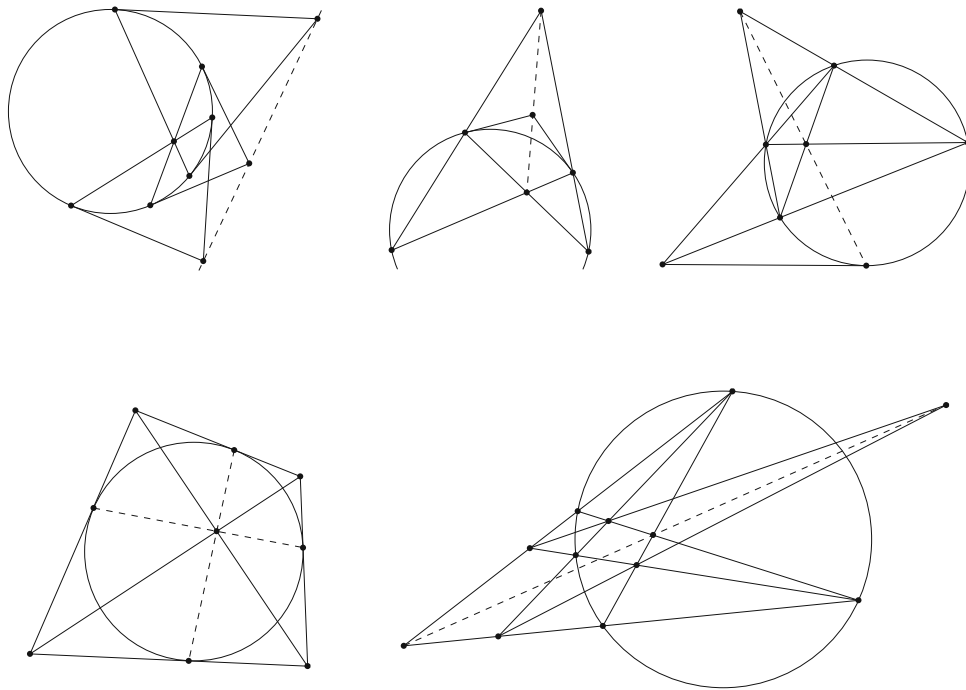
A P középpontú, PE sugarú inverzió a gömböt önmagára képezi, felcseréli egymással A -t B -vel, valamint C -t D -vel, ezért az alapsíkra merőleges a és b köröket is egymásra képezi. A PT egyenesen T a két kör egyetlen – közös – pontja, tehát az inverzióknak – E és F mellett – T is fixpontja, tehát PT érinti $\mathcal{G}$ -t. Az ilyen pontok az alapsíkra merőleges, EF átmérőjű e körön vannak, tehát az EFT sík is merőleges k síkjára, így tartalmazza a TR szakaszt és vele együtt az R pontot. Ebből azt is látjuk, hogy az EF egyenes átmegy az R ponton. De az EF egyenes a P pont polárisa, tehát P és R konjugáltak. Ugyanígy láthatjuk, hogy Q és R konjugáltak.

Az előbbi, P középpontú inverzió önmagára képezi a PT egyenest és felcseréli egymással az a és b köröket; az inverzió szögtartása miatt a PT egyenes ugyanakkora szöget zár be a két körrel, illetve a T pontban húzott érintőkkel. Mindhárom egyenes egy síkban, a T -ben a gömbhöz fektetett érintősíkban van; tehát PT a két kör közötti egyik szög felezője. Hasonlóan, a QT egyenes a két kör közötti másik, kiegészítő szög felezője. A két szögfelező, vagyis PT és QT merőlegesek, tehát P és Q konjugáltak. Ezzel beláttuk, hogy a P, Q, R pontok páronként konjugáltak, vagyis a PQR háromszög valóban autopoláris.

Feladatok

1. Mi a Desargues-tétel duálisa?

2. Mi a Papposz-tétel duálisa?
3. Írjuk és rajzoljuk fel az autopoláris háromszögekről szóló tétel duálisát.
4. Feladatok szöveg nélkül:



5. Igazoljuk, hogy tetszőleges P és Q pontok akkor és csak akkor konjugáltak a k körre nézve, ha a PQ átmérőjű kör merőlegesen metszi k -t.
6. Vetítsük a k kör síkját középpontosan egy másik, vele nem párhuzamos síkra úgy, hogy a k kör vetülete is kör legyen. Mutassuk meg, hogy a vetítés megtartja a polaritást, azaz bármely pont vetületének polárisa az új síkban a poláris vetülete, és egyenes vetületének pólusa a pólus vetülete.

Ajánlott irodalom

- [1] Sz. C. Havalampijev: *Pólus és poláris körben*, KöMaL 37/1 (1987. január), 9–15.
<http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=198702>
- [2] Kiss György: *A körre vonatkozó polaritás*, KöMaL 48/8–9 (1998. november), 450–455.
<http://db.komal.hu/scan/1998/11/MAT9808.PS>
- [3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, 46. fejezet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.