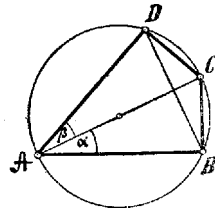


Két szög összegének és különbségének sinusát, valamint két szög sinusának összegét és különbségét könnyen számíthatjuk ki a *Ptolemäus-* féle tételekkel.

I. Legyen $AC = 2r = 1$, úgy

$$CB = \sin \alpha, AB = \cos \alpha, DC = \sin \beta, AD = \cos \beta,$$

$$DB = 2r \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$$



Ptolemäus első tétele alapján:

$$AC \cdot DB = CB \cdot AD + AB \cdot CD.$$

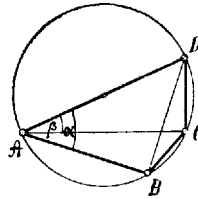
A fentebbi értékeket helyettesítve:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

II. Legyen $AD = 2r = 1$, úgy

$$AB = \cos \alpha, CB = 2r \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha - \beta)$$

$$AC = \cos \beta, DC = \sin \beta, DB = \sin \alpha.$$



A második ábrára Ptolemäus tételét alkalmazva:

$$DB \cdot AC = AD \cdot CB + AB \cdot DC$$

a függvényeket helyettesítve:

$$\sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \sin \beta$$

vagy

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

III. Ptolemäus második tétele szerint (1. első ábra):

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB \cdot BC + AD \cdot CD}{AD \cdot AB + DC \cdot CB}$$

I)-ből a függvényeket helyettesítve:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

vagy

$$2 \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\cos(\alpha - \beta)},$$

miből

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$$

vagy ha

$$2\alpha = \varphi, 2\beta = \psi,$$

úgy

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}$$

IV. Ptolemäus második tételét a második ábrára alkalmazva:

$$\frac{DB}{AC} = \frac{AB \cdot CB + AD \cdot DC}{AB \cdot AD + DC \cdot CB}$$

(II)-ből a függvényeket helyettesítve:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{\cos \alpha \sin(\alpha - \beta) + \sin \beta}{\cos \alpha + \sin \beta \sin(\alpha - \beta)}$$

A törtek nevezőit eltávolítva:

$$\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta = \sin(\alpha - \beta)[\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta]$$

vagy

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)$$

s így

$$\sin \varphi - \sin \psi = 2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

(Bulletin Scientifique.)