

A KÖMAL 1979/2. számában kitűzött SZ9 jelű feladat megoldása

A kitűzött feladat szövege az alábbi volt:

Egy vegyi üzem négyféle alapanyagból háromféle terméket állít elő. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az egyes termékek egy kilogrammnyi mennyiségéhez hány kilogramm alapanyag felhasználása szükséges.

Termék\Alapanyag	A	B	C	D
1.	0,4	0,4	0,0	0,8
2.	0,2	0,2	0,7	0,6
3.	0,1	0,8	0,5	0,4

Az alapanyagok árát és a naponta beszerezhető maximális nyersanyagmennyiséget az alábbi táblázatban látjuk:

	A	B	C	D
Ft/kg	0,72	0,13	1,5	0,85
Nap/kg	1000	1000	600	800

Mennyit kell termelni naponként az egyes termékekből ahhoz, hogy a nyersanyag-felhasználás összköltsége maximális legyen?

Megoldás: A táblázatból kiszámítható a háromféle termék egy-egy kg-jához szükséges nyersanyagok ára. Így pl. az 1. termékre:

$$0,4 \cdot 0,72 + 0,4 \cdot 0,13 + 0,8 \cdot 0,85 = 1,02 \text{ Ft/kg.}$$

Hasonlóan a második termékre 1,73 és a 3. termékre 1,266 Ft/kg adódik. Ennek alapján az összes felhasznált nyersanyag árát a

$$z = 1,02x_1 + 1,73x_2 + 1,266x_3$$

kifejezés adja meg, ahol x_1 , x_2 és x_3 a termelt termékek kg-ban kifejezett mennyisége. Ha z -t mint e változók függvényét tekintjük, akkor a feladat olyan termékmennyiségek keresése, amelyek z -nek maximális értékét adják. Ezt nevezzük *optimális megoldásnak*. Minden egyéb megoldást lehetséges megoldásnak nevezünk. Készítsük el az alábbi táblázatot, és próbáljuk egy lehetséges megoldás adataival kitölteni.

1. táblázat

Termék Anyag	x_1	x_2	x_3	Korlát	Felhasznált	Megmaradt
A			—	1000		
B				1000		
C				600		
D				800		
Készült termék						
Egységár						
z						

Mivel az x_1 termék C -ből nem használ, célszerű ezzel kezdeni a nyersanyag „kiosztását”. Kezdjük tehát az x_2 -vel. Tegyük erre a legszűkösebben rendelkezésre álló nyersanyag egész mennyiségét, 600 kg-ot. Ekkor x_2 -ből 600 : 0,7 = 357,143 kg termelhető, amihez viszont A -ból 171,429 kg, B -ből ugyanennyi, és D -ből 514,286 kg szükséges. Miután C -ből a teljes készlet elfogyott, a maradék anyagokból csak x_1 állítható elő. Ennek korlátot szab, hogy D -ből 800 – 514,286 = 285,714 kg áll rendelkezésre, amiből (0,8-del osztva) 357,143 kg termék készülhet. Ehhez A -ból és B -ből egyenként 142,857 kg szükséges. A kapott adatokkal kitöltve a táblázatot, a 2. táblázat áll elő.

2. táblázat

Anyag \ Termék	x_1	x_2	x_3	Korlát	Felhasználás	Megmaradt
<i>A</i>	142,875	171,429	0	1000	314,286	685,714
<i>B</i>	142,875	171,429	0	1000	314,286	685,714
<i>C</i>	0	600	0	600	600	0
<i>D</i>	285,714	514,286	0	800	800	0
Készült	357,143	857,143	0			
Egységár	1,02	1,73	1,266			
<i>z</i>	1847,14					

Mármost ebből a lehetséges megoldásból kiindulva próbáljunk meg egy „jobb” megoldást csinálni. (Olyat, amelynél z értéke nagyobb.) Vizsgáljuk meg, hogy ha az x_2 termékből 1 kg-mal kevesebbet termelnénk, akkor – a felszabaduló nyersanyagot x_1 -ben és x_3 -ban felhasználva – magasabb lenne-e az összesen felhasznált nyersanyag ára. Ezt mutatja meg (az előzőhöz hasonló módon végigszámolva) a 3. táblázat.

3. táblázat

a \ t	x_1	x_2	x_3	Korlát	Fel- használt	Meg- maradt	Δ Fel- használt
<i>A</i>	142,877	171,229	0,14	1000	314,246	685,894	+ 0,04
<i>B</i>	142,877	171,229	1,12	1000	315,266	685,814	– 0,94
<i>C</i>	0	599,3	0,7	600	600,0	0	0
<i>D</i>	285,754	513,686	0,56	800	800,0	0	0
Készül	357,193	856,143	1,4				
Egységár	1,02	1,73	1,266				
<i>z</i>	1847,24						
Δ kész.	+ 0,05	– 1,0	+ 1,4				
<i>z</i>	+ 0,0934						

A rovatokban a táblázatban szereplő mennyiségeknek a 2.-beli megfelelő értékektől való előjeles eltérése áll. Ezekből a legfeltűnőbb az, hogy az x_2 mennyiségének 1 kg-mal való csökkentése az x_1 -nek 0,05 kg-nyi és az x_3 -nak 1,4 kg-nyi növekedésével jár együtt, ha a felszabaduló nyersanyagokat ezek termelésére fordítjuk.

Ennek megfelelően a z értéke is nő Könnyen belátható, hogy x_1 további csökkentésével a Δ -hoz tartozó mennyiségek lineárisan változnak. Ebből következik, hogy most már csak azt kell megállapítani, hogy x_2 termelését hány kg-mal csökkentjük a másik két termék javára. A csökkentésnek a *B*-hez tartozó korlát szab határt. Miután a 2. tábla szerinti maradék 685,714 kg, a 3-ban a megfelelő csökkenés 0,94, ezért ennek 729,48297-szerese fogyasztható még el. Ha most a 3-beli Δ értékeket ezzel az arányossági tényezővel szorozzuk és a 2-beli alapértékekhez hozzáadjuk, megkapjuk a 4. táblázatot, amelyet csak részben volt érdemes kitölteni. Belátható, hogy az ebben szereplő z a lehető legnagyobb, mivel bármilyen, a korlátok közt tartott termékmennyiség változtatása csak ronthat rajta.

4. táblázat

$\begin{matrix} & t \\ a & \end{matrix}$	x_1	x_2	x_3	Korlát	Felhasználás	Megmaradt
A				1000	343,465	656,535
B				1000	1000	0
C				600	600	0
D				800	800	0
Készült	393,617	127,660	1021,276			
Egységár	1,02	1,73	1,266			
z	1915,28					

Feladatok

Sz. 9. (Újból kitűzve.) Oldjuk meg a feladatot Prékopa Andrásnak a KÖMAL 1979. 4-5. számaiban megjelent cikke alapján, vagy Csath Magdolna: Operációkutatás (1972. Számítástechnikai Oktató Központ) c. könyv 75.–98. old. alapján Adják meg a beküldők megoldásában, hogy melyik forrást használták fel segítségül.

Sz. 14. Program készítendő, mely legfeljebb 30 síkbeli koordinata-ponthoz kiszámítja, hogy melyek tartoznak e ponthalmazt burkoló konvex poligon csúcspontjaihoz, ill. a burokhöz, és melyek helyezkednek el a burkon belül. Input: $3 \leq n \leq 30$ az első kártyán, majd további n számú kártyán a koordináták, amelyeket F10.3 specifikációval kezelünk. Output: a beolvasott pontok, feliratkozva, külön listán a burkoló pontjai és külön a belsejében levő pontok listája.

Beküldési határidő: 1979. november 30.

A feladatmegoldások a következő címre küldhetők:

Ada-Winter Péter,

MŰM Számítástechnikai Intézet

Budapest, VIII.

Reguly Antal u. 57-59.

1089.