

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\left. \begin{aligned} 9^x \cdot 3^y &= 81, \\ 6x + 6y + 5xy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11 \text{ pont})$$

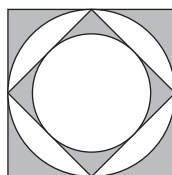
2. A miskolci pályaudvar utasellátó büféjének ajtaján a következő tájékoztató szöveg olvasható:

Nyitva tartás 03.30–23.30.

Műszakátadás miatt 07.30–08.30 és 19.30–20.30 között zárva!

- a) Mekkora eséllyel találjuk nyitva a büfét, ha reggel 7 és este 9 között véletlenszerűen érkezünk a bejáratához?
b) Egy vargabélest vásároltunk 200 Ft-ért. A pénzt pontosan kiszámolva adtuk át a pénztárosnak. Hányféleképpen tehettük ezt meg, ha 20 Ft-osnál kisebb címletet nem adtunk, és a sorrend nem számít?
c) Az utánunk következő vásárló három péksüteményt szeretne venni, a kínálat: diós búrkifli, ízes levél, túrós táska, meggyes rétes és kakaós csiga. Mekkora eséllyel találjuk el, hogy mit fog vásárolni, ha azt feltételezzük, hogy mindegyik választásának ugyanannyi az esélye? (12 pont)

3. Az ábrán egy egység oldalú négyzet, annak beírt köre, oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet és annak is a beírt köre látható.



- a) Hány százalékát színeztük ekkor szürkére a nagy négyzetnek?
b) Ismételtük meg ezt az eljárást végtelen sokszor. Hány százalékát színeztük így szürkére a nagy négyzetnek? (14 pont)
4. Egy 30 fős osztályból hányféle különböző módon állíthatunk össze
- a) egy ötfős csoportot; (2 pont)
b) egy legfeljebb öt-, de legalább kétfős csoportot; (4 pont)
c) egy ötfős csoportot, ha az osztály diákbizottság elnökének mindenképp benne kell lennie; (4 pont)
d) egy ötfős csoportot, akik közül egy embert csoportvezetőnek jelölünk ki? (4 pont)

II. rész

5. Adott a $[0; 9]$ intervallumon értelmezett $f(x) = 2\sqrt{x}$ függvény.

- a) Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origó, egy másik csúcsa az x tengelyre, a harmadik csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Mekkora e háromszög területe?
b) Egy téglalap egyik oldala az x tengelyre, egy másik oldala az $x = 9$ egyenesre, egy csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Határozzuk meg a legnagyobb ilyen téglalap területét.
c) Az $f(x)$ függvénygörbe és az x tengely közötti területet az $x = a$ egyenes felezi. Határozzuk meg az a paraméter értékét. (16 pont)

6. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-7; -2)$, $B(11; -2)$, $C(-1; 10)$.

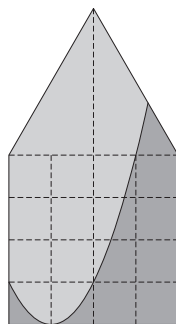
- a) Adjuk meg a háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra található K pont koordinátáit.
b) Adjuk meg a háromszög M magasságpontjának koordinátáit.
c) Igazoljuk számítással, hogy az ABC háromszögben az S súlypont harmadolja az MK szakaszt. (16 pont)

7. a) Két pozitív egész szám köbének különbsége 169. Melyek ezek a számok?

- b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív természetes szám ötödik hatványából kivonjuk magát a számot, a különbség minden esetben osztható lesz a három legkisebb pozitív prímszámmal. (16 pont)

¹Bővebb információ: <https://www.komal.hu/kiadvany/emeltszintu3.h.shtm1>.

8. Egy ház tőzfala egy négyzetből és egy szabályos háromszögből áll. A falat két színnel szeretnék vakolni. A két rész között a határvonal egy parabola lesz, amit a mellékelt *ábra* mutat. A házikó parabola feletti részét világosabbra, a többi sötétebbre vakolják. A felület hány százaléka lesz sötétebb árnyalatú? (16 pont)



9. Határozzuk meg azokat az x valós számokat, amelyekre $\cos x$ és $\cos 2x$ négyzetösszege a $\cos 3x$ négyzetével egyenlő. (16 pont)

9. Van hatféle számkártyánk, mindegyikből 1-1 darab: 1, 2, 3, 4, 5, 6. A kártyákat véletlenszerűen sorba rendezve hatjegyű számokat képezünk.

- Igazoljuk, hogy $\frac{4}{15}$ annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz 12-vel.
- Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az így kapott szám a 6-os számjeggyel kezdődik, feltéve, hogy 12-vel osztható.
- Egy papírlapra felírjuk a számkártyákból képezhető összes lehetséges hatjegyű számot. Határozzuk meg a papírlapra felírt számok mediánját.

(16 pont)