

I. rész

1. a) *Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb 4?* (7 pont)
b) *Hány olyan lesz ezek között a számok között, amely osztható 60-nal?* (5 pont)

Megoldás. a) A sorrendre való tekintet nélkül 11-féleképpen tudjuk előállítani a 4-et, a 3-at, a 2-t vagy az 1-et négy nemnegatív egész szám összegeként:

$$4 = 4 + 0 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 + 0 = 2 + 2 + 0 + 0 = 2 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (5 lehetőség);}$$

$$3 = 3 + 0 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 + 0 \text{ (3 lehetőség);}$$

$$2 = 2 + 0 + 0 + 0 = 1 + 1 + 0 + 0 \text{ (2 lehetőség);}$$

$$1 = 1 + 0 + 0 + 0 \text{ (1 lehetőség).}$$

Az $XXXX$ típusból csak egyféleképpen alkothatunk négyjegyű számot, mert a 0 nem állhat a legnagyobb helyiértéken.

Az $XY00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a két nulla helyét, a maradék két helyre 2-féleképpen variálhatjuk a másik két számjegyet, tehát ezekből egyaránt $(3 \cdot 2 =)$ 6 négyjegyű számot képezhetünk.

Az $XX00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a két nulla helyét, így ezekből 3 különböző négyjegyű szám adódik.

Az $YY00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a nulla helyét, ezután 3-féleképpen választhatjuk ki az X helyét, így ebből $(3 \cdot 3 =)$ 9-féle négyjegyű szám képezhető.

Az $XX0X$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a nulla helyét, így ebből 3 különböző négyjegyű szám adódik.

Végül az $XXXX$ típusból csak egyféleképpen alkothatunk négyjegyű számot.

Összesen tehát $(1 + 6 + 3 + 9 + 1 + 1 + 6 + 3 + 1 + 3 + 1 =)$ 35, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.

b) 60-nal pontosan akkor osztható egy szám, ha 3-mal, 4-gyel, és 5-tel is osztható. 3-mal csak akkor osztható a szám, ha számjegyeinek összege 3-mal osztható, tehát esetünkben a számjegyek összege 3. 5-tel akkor osztható, ha 0-ra vagy 5-re végződik, de 5-re végződő szám nincs a szóba jövő számok között, a számnak tehát 0-ra kell végződnie. 4-gyel akkor osztható, ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható 4-gyel, tehát a szóba jöhető lehetőségek közül az utolsó két számjegy 00 vagy 20 lehet (12 nem lehet, mert az 5-tel oszthatóság miatt 0-ra kell végződnie).

Azok a négyjegyű számok, melyek 00-ra vagy 20-ra végződnek, és számjegyeik összege 3, a következők: 3000, 2100, 1200, 1020.

Tehát 4, a feltételeknek megfelelő szám van.

2. a) *Egy osztályban egy matematika dolgozatnál a 6 kékszemű tanuló átlaga pontosan 3, a többi, nem kékszemű tanuló átlaga pontosan 4 lett. A 21 fiú átlaga pontosan 3,5, a lányok átlaga pontosan 4,5 lett. Határozzuk meg a dolgozat átlagát a teljes osztályban.* (5 pont)

b) *Az iskolai túraszakosztály a hétvégi kirándulásra különbuszt rendelt. A buszköltséget a résztvevők között egyenlő arányban osztják szét. A kitűzött jelentkezési határidő egy hétfői napon járt le. Mivel maradt még szabad hely a buszban, ezért kedden még két jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség 175 Ft-tal csökkent. Szerdán aztán még három jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség további 225 Ft-tal csökkent. Így már megtelt a megrendelt autóbusz.*

Hány jelentkezést fogadtak el összesen a kirándulásra, és mennyibe került a megrendelt különbusz? (8 pont)

Megoldás. a) Jelölje az osztály létszámát x . Az osztályzatok összegét kétféleképpen felírva:

$$6 \cdot 3 + (x - 6) \cdot 4 = 21 \cdot 3,5 + (x - 21) \cdot 4,5,$$

$$4x - 6 = 4,5x - 21,$$

$$x = 30.$$

Az osztály létszáma 30 volt.

A dolgozat átlaga a teljes osztályban $\frac{6 \cdot 3 + 24 \cdot 4}{30} = 3,8$ volt.

Ellenőrzés: $\frac{21 \cdot 3,5 + 9 \cdot 4,5}{30} = 3,8$, ami megegyezik az előzőleg kiszámított átlaggal.

b) *I. megoldás.* Jelölje x a szerdáig elfogadott jelentkezések számát. Ekkor hétfőig $x - 5$, keddig $x - 3$ jelentkezést fogadtak el. Jelölje y a teljes buszköltséget.

Ekkor megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x - 5} - 400,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x - 3} - 225.$$

Beszorozva a nevezőkkel:

$$y(x - 5) = yx - 400x(x - 5),$$

$$y(x - 3) = yx - 225x(x - 3).$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és rendezve:

$$\begin{aligned}5y &= 400x(x - 5), \\3y &= 225x(x - 3).\end{aligned}$$

Az első egyenletből $y = 80x(x - 5)$, ezt a másodikba beírva:

$$240x(x - 5) = 225x(x - 3).$$

Mivel $x \neq 0$, oszthatunk vele, és rendezés után kapjuk, hogy $x = 35$. Visszahelyettesítve $y = 84\,000$ adódik. Tehát 35 jelentkezést fogadtak el szerdáig, a teljes buszköltség pedig 84 ezer Ft volt.

Ellenőrzés: hétfőig 30 ember jelentkezett, nekik $(\frac{84\,000}{30} =)$ 2800 Ft-ot kellett volna fizetni.

Keddig 32 ember jelentkezett, így egy embernek $(\frac{84\,000}{32} =)$ 2625 Ft-ot kellett volna fizetni. $2625 = 2800 - 175$ valóban.

Szerdáig 35 ember jelentkezett, így egy embernek $(\frac{84\,000}{35} =)$ 2400 Ft-ot kellett fizetni. $2400 = 2625 - 225$ valóban.

II. megoldás. Jelölje n a hétfőig elfogadott jelentkezések számát, és b (Ft) az egy főre eső buszköltséget n jelentkező esetén. Ekkor keddig $n + 2$ fő jelentkezett, akiknek $b - 175$ Ft-ot kellett volna fizetni, szerdáig pedig végül $n + 5$ fő jelentkezett, akiknek $b - 400$ Ft-ot kellett fizetni. Ekkor megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}nb &= (n + 2)(b - 175), \\nb &= (n + 5)(b - 400).\end{aligned}$$

Mindkét egyenletben elvégezve a kijelölt műveleteket, és nb -t kivonva az egyenletek mindkét oldalából:

$$\begin{aligned}0 &= 2b - 175n - 350, \\0 &= 5b - 400n - 2000.\end{aligned}$$

A második egyenletből $b = 80n + 400$, ezt az elsőbe beírva:

$$0 = 2(80n + 400) - 175n - 350,$$

ahonnan rendezés után kapjuk, hogy $n = 30$. Visszahelyettesítve $b = 2800$ adódik.

Tehát $(30 + 5 =)$ 35 jelentkezést fogadtak el szerdáig, a teljes buszköltség pedig $(30 \cdot 2800 =)$ 84 000 Ft volt.

Ellenőrzés mint az I. megoldásban.

3.

a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$4^x + 2 < 9 \cdot 2^{x-1}. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left| \frac{3}{2} - \sin x - 2 \cos^2 x \right| = \frac{1}{2}. \quad (7 \text{ pont})$$

Megoldás.

a) Legyen $2^x = a$. Ekkor $4^x = a^2$ és $2^{x-1} = \frac{a}{2}$. Így az egyenlőtlenség a következőképpen írható fel: $a^2 + 2 < \frac{9a}{2}$. Kettővel beszorozva és nullára rendezve:

$$2a^2 - 9a + 4 < 0.$$

A $2a^2 - 9a + 4 = 0$ egyenlet gyökei 4 és 0,5. Mivel a főegyüttható pozitív, az egyenlőtlenség $0,5 < a = 2^x < 4$ esetén teljesül.

Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, $2^{-1} < 2^x < 2^2$ pontosan akkor teljesül, ha $-1 < x < 2$.

$$b) \quad \frac{3}{2} - \sin x - 2 \cos^2 x = \frac{3}{2} - \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 2 \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2}.$$

Az abszolútértéket figyelembe véve két eset lehetséges:

$$2 \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad 2 \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Nullára rendezve az egyenleteket kapjuk, hogy

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad \text{vagy} \quad 2 \sin^2 x - \sin x = 0.$$

A $\sin x$ -ben másodfokú egyenleteket megoldva adódik, hogy $\sin x$ értéke négyféle lehet: 1 , $-\frac{1}{2}$, 0 vagy $\frac{1}{2}$. Ezekből kapjuk az egyenlet megoldásait: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ és $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

4. a) Az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

és a

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = (x - c)^2 + d$$

függvények grafikonjai az $M_1(-1; 10)$ és az $M_2(4; -5)$ pontokban metszik egymást. Határozzuk meg az a , b , c és d értékét. (7 pont)

b) Határozzuk meg az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 7$$

és a

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = (x + 3)^2 - 6$$

függvények által közrezárt síkidom területét. (6 pont)

Megoldás. a) M_1 és M_2 illeszkednek f grafikonjára, ezért $10 = -a + b$ és $-5 = 4a + b$. Az első egyenletből kivonva a másodikat $15 = -5a$ adódik, innen pedig $a = -3$. Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy $b = 7$.

M_1 és M_2 illeszkednek g grafikonjára is, ezért $10 = (-1 - c)^2 + d$ és $-5 = (4 - c)^2 + d$. Az első egyenletből kivonva a másodikat a $15 = (-1 - c)^2 - (4 - c)^2$ egyenlet adódik. A négyzetre emeléseket elvégezve a másodfokú tag kiesik, és kapjuk, hogy $15 = 10c - 15$, innen pedig $c = 3$. Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe $10 = (-1 - 3)^2 + d$, ahonnan $d = -6$.

Összefoglalva tehát $a = -3$, $b = 7$, $c = 3$ és $d = -6$, így $f(x) = -3x + 7$ és $g(x) = (x - 3)^2 - 6$.

b) Meghatározzuk a két függvény metszéspontjait.

$$3x + 7 = (x + 3)^2 - 6$$

A négyzetre emelést elvégezve és nullára rendezve: $0 = x^2 + 3x - 4$. Ennek az egyenletnek a gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$.

Mivel a két függvény grafikonja közül az f grafikonja helyezkedik el a g grafikonja fölött, ezért a keresett területet

a $\int_{-4}^1 (f(x) - g(x)) \, dx$ integrál adja meg:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (3x + 7) - [(x + 3)^2 - 6] = 3x + 7 - (x^2 + 6x + 3) = -x^2 - 3x + 4, \\ \int_{-4}^1 (-x^2 - 3x + 4) \, dx &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^1 = \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16 \right) = \frac{13}{6} - \left(-\frac{56}{3} \right) = \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

A síkidom területe tehát $\frac{125}{6}$ területegység.

II. rész

5. Egy felmérésben azt vizsgálták, az autók hogyan viszonyulnak a téli gumibroncsok használatához. A felmérésben 1800 autóst kérdeztek meg. Azok, akik használnak téli gumibroncsokat, 1320-szal többen voltak, mint akik nem. Azok között, akik nem használnak téli gumibroncsot, 40%-kal kevesebben voltak azok, akik ezt nem is tartják fontosnak, mint azok, akik ugyan fontosnak tartják, de anyagi okokból lemondanak róla.

a) Ábrázoljuk a felmérés eredményét kördiagramon. (6 pont)

Egyes személyautókban az autó által megtett távolságot az autó műszerei úgy számítják ki, hogy a gumibroncs ismert kerületét és a kerék által megtett fordulatok számát összeszorozzák.

Vera észrevette, hogy néhány év használat után az autó műszerei már pontatlanul mutatták a megtett távolságot: amíg az út melletti kilométerkövek tanúsága szerint pontosan 100 km-t tett meg, addig a műszerfal 101,2 km megtett

utat jelzett. Ennek az volt az oka, hogy az autó gumiabroncsai a néhány év használat alatt kicsit elkoptak, így a kerületük csökkent. A katalógusok szerint a Vera autóján használt gumiabroncsok gyártáskori átmérője 632 mm volt. A műszerek – a kopást figyelmen kívül hagyva – mindvégig ebből az adatból határozták meg az autó által megtett távolságot.

b) Hány millimétert kopott eddig Vera autója gumiabroncsának felülete? (5 pont)

A rendőrség közúti ellenőrzés-sorozatán vizsgálja az autók gumiabroncsát. Egy nyári gumiabroncs úgynevezett profilmélysége gyártáskor kb. 8 mm. Az érvényes jogszabályok szerint nem lehet közlekedni olyan gumiabronccsal, melynek a kopása olyan mértékű, hogy profilmélysége 1,6 mm alá csökken. Felmérések alapján feltételezhető, hogy minden tizenötödik autón a gumiabroncsok kopása ezt az értéket meghaladja. (Ezt úgy tekinthetjük, hogy minden egyes autó esetén $1/15$ annak a valószínűsége, hogy a kopás 1,6 mm alá csökkent.)

c) Egy járőrpáros egy napi szolgálat alatt 80 autó gumiabroncsainak kopását ellenőrzi. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy legalább 5 olyan autót találjanak az ellenőrzés során, melynél a gumiabroncsok kopása meghaladja a jogszabályban előírt határértéket. (5 pont)

Megoldás. a) $\frac{1800 - 1320}{2} = 240$ autós nem használ téli gumiabroncsot, $1800 - 240 = 1560$ autós igen. Legyen n 240 téli gumiabroncsot nem használó autós közül azoknak a száma, akik anyagi okból mondanak le a használatáról, ekkor azok száma, akik nem is tartják fontosnak a használatát, $0,6n$. $0,6n = 240 - n$, ahonnan $n = 150$.

Tehát 150-en anyagi okokból mondanak le a téli gumiabroncs használatáról, 90-en pedig nem tartják fontosnak a használatát. A kördiagramon $1^\circ \frac{1800}{360} = 5$ autósna felel meg.



A téli gumiabroncsot használókhoz tartozó középponti szög tehát $\frac{1560}{5} = 312$ fokos, a használatról anyagi okokból lemondókhoz tartozó középponti szög $\frac{150}{5} = 30$ fokos, a használatot fontosnak nem tartókhoz tartozó középponti szög pedig $\frac{90}{5} = 18$ fokos.

b) I. megoldás. A gumiabroncs gyártáskori kerülete $K = d\pi \approx 1985,5$ mm. Ekkor 100 km megtétele alatt a kerék $\frac{100\,000\,000}{1985,5} \approx 50\,365$ -öt fordul.

A kopott gumiabronccsal futó autó műszerei 101,2 km út megtételét

$$\frac{101\,200\,000}{1985,5} \approx 50\,970$$

fordulat érzékelése után jelzik. Ekkor azonban az autó ténylegesen még csak 100 km-t tett meg, tehát az abroncs kerülete $\frac{100\,000\,000}{50\,970} \approx 1961,9$ mm, sugara $\frac{1961,9}{2\pi} \approx 312,2$ mm.

Mivel az abroncs gyártáskori sugara 316 mm volt, ezért a felületi kopás kb. 3,8 mm volt.

II. megoldás. A műszerek a ténylegesen megtett út 1,012-szeresét érzékelték, tehát a kerék 1,012-szer annyi fordulatot tett meg, mint amennyit újkori állapotában 100 km-en fordult volna. Azaz kerülete 1,012-ed részére csökkent. Mivel a kerület és a sugár egyenesen arányos, ezért a kerék sugara is 1,012-ed részére csökkent, tehát a gumi kopott állapotában $316 : 1,012 \approx 312,3$ mm-es. A felületi kopás így kb. 3,7 mm (az I. megoldásban a kerekítések miatt jött ki 3,8 mm).

c)

$$\begin{aligned} P(\text{legalább } 5) &= 1 - P(\text{legfeljebb } 4) = \\ &= 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)]. \end{aligned}$$

Az $n = 80$ és $p = \frac{1}{15}$ paraméterű binomiális eloszlás segítségével:

$$\begin{aligned} P(0) &= \left(\frac{14}{15}\right)^{80} \approx 0,0040, \\ P(1) &= \binom{80}{1} \left(\frac{14}{15}\right)^{79} \cdot \frac{1}{15} \approx 0,0229, \\ P(2) &= \binom{80}{2} \left(\frac{14}{15}\right)^{78} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2 \approx 0,0646, \\ P(3) &= \binom{80}{3} \left(\frac{14}{15}\right)^{77} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^3 \approx 0,1200, \\ P(4) &= \binom{80}{4} \left(\frac{14}{15}\right)^{76} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^4 \approx 0,1650. \end{aligned}$$

Így $P(\text{legalább } 5) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)] \approx 1 - 0,3765 = 0,6235$.

6. A valós számokon értelmezett $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + bx + c$ függvénynek lokális maximuma van $x = -2$ -nél.

a) Igazoljuk, hogy ekkor $b = -12$. (5 pont)

b) Határozzuk meg c lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy az f -nek három különböző zérushelye van. (7 pont)

c) Határozzuk meg az f zérushelyeit abban az esetben, ha $c = 0$. (4 pont)

Megoldás. a) A függvénynek ott lehet lokális maximuma, ahol az első deriváltja nulla. $f'(x) = 6x^2 + 6x + b$, $f'(-2) = 12 + b = 0$, azaz valóban csak $b = -12$ lehetséges.

Ellenőrizni kell még, hogy valóban lokális maximumhely-e ekkor a -2 . $f''(x) = 12x + 6$, $f''(-2) = -18$, mivel a második derivált itt negatív, ezért a -2 valóban lokális maximumhely.

b) A harmadfokú függvény alakját figyelembe véve akkor lesz az f -nek három különböző zérushelye, ha a lokális maximuma pozitív, lokális minimuma negatív értéket vesz fel.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$

A deriváltfüggvény zérushelyei a -2 és az 1 , melyek közül a -2 lokális maximumhely, az 1 pedig lokális minimumhely.

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + c = 20 + c > 0, \quad \text{ahonnan } c > -20,$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + c = -7 + c < 0, \quad \text{ahonnan } c < 7.$$

Összevetve: $-20 < c < 7$ esetén lesz f -nek három különböző zérushelye.

c) $c = 0$ esetén: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x = x(2x^2 + 3x - 12)$. Ennek a függvénynek egyik zérushelye $x_1 = 0$, másik két zérushelyét a $2x^2 + 3x - 12 = 0$ egyenlet megoldásai adják. Ezek (a másodfokú egyenlet megoldóképletéből)

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4} \quad (\text{azaz három tizedesjegy pontossággal } -3,312 \text{ és } 1,812).$$

7. A kanasztá nevű kártyajátékot két csomag francia kártyával játsszák. Egy csomag francia kártyában 55 lap található: négy szín (pikk, káró, kőr, treff) mindegyikében 13-13 lap (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bubi, Dáma, Király, Ász) van. Ezeken a lapokon kívül mindegyik csomagban van három Joker is. A pikk és treff színű lapok feketék, a káró és kőr színű lapok pirosak.

A játék elején az egyik játékos kettéválasztja a jól megkevert kártyacsomagot, és a csomag egyik felében az alsó három lapot megnézheti: ez az úgynevezett emelés. Ha a három lap között van „szerencsés” lap, akkor ezeket a szerencsés lapokat a játékos megkapja. Szerencsés lapnak számít a hat darab Joker, a nyolc darab 2-es (amit a kanasztában szintén Jokernek használnak) és a négy darab piros 3-as.

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az emelést végző játékos nulla, egy, kettő, illetve három szerencsés lapot kap. (5 pont)

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kezdő játékosnak kiosztott első négy lap között mind a négy szín előfordul. (4 pont)

Egy szerencsejátékban 4 Király és 4 Ász közül visszatevés nélkül húz lapokat a játékos, egészen addig, amíg az első Ászt kihúzza. Ha az első Ász kihúzása előtt k darab Királyt húzott ki, akkor a játékos nyereménye $100k^2$ forint.

c) Határozzuk meg ebben a játékban a nyeremény várható értékét. (7 pont)

Megoldás. a) A kért valószínűségeket hipergeometrikus eloszlás segítségével határozhatjuk meg. Összesen

van a két csomagban 110 lap, ezek között 18 szerencsés, és 3 lapot húzunk ki visszatevés nélkül.

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{\binom{92}{3}}{\binom{110}{3}} = \frac{125\,580}{215\,820} = \frac{2093}{3597} \approx 0,582, \\ P(1) &= \frac{\binom{18}{1}\binom{92}{2}}{\binom{110}{3}} = \frac{75\,348}{215\,820} = \frac{2093}{5995} \approx 0,349, \\ P(2) &= \frac{\binom{18}{2}\binom{92}{1}}{\binom{110}{3}} = \frac{14\,076}{215\,820} = \frac{391}{5995} \approx 0,065, \\ P(3) &= \frac{\binom{18}{3}}{\binom{110}{3}} = \frac{816}{215\,820} = \frac{68}{17\,985} \approx 0,0038. \end{aligned}$$

b) Annak a valószínűsége, hogy például az első négy lap sorban pikk, káró, kőr és treff:

$$\frac{26}{110} \cdot \frac{26}{109} \cdot \frac{26}{108} \cdot \frac{26}{107} \approx 0,0033.$$

A négy különböző szín azonban $4! = 24$ -féle sorrendben kerülhet elő, ez 24 különböző (diszjunkt) lehetőség, tehát a kért valószínűség az előző érték 24-szerese, azaz 0,079.

c) Annak a valószínűsége, hogy 0, 1, 2, 3, illetve 4 Királyt húz a játékos az első Ász előtt:

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \\ P(1) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7}, \\ P(2) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{7}, \\ P(3) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{35}, \\ P(4) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{70}. \end{aligned}$$

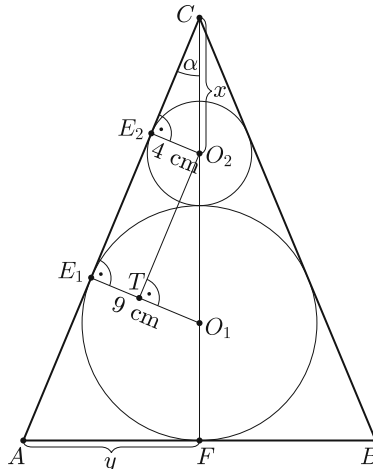
A kért várható érték így

$$\sum_{i=0}^4 P(i) \cdot 100i^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{2}{7} \cdot 100 + \frac{1}{7} \cdot 400 + \frac{2}{35} \cdot 900 + \frac{1}{70} \cdot 1600\right) = 160 \text{ Ft.}$$

8. Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AB , beírt körének középpontja O_1 , a beírt kör sugara 9 cm. A háromszögben olyan kört írunk, mely érinti a beírt kört és a háromszög két szárát. Ennek a körnek a középpontja O_2 , sugara pedig 4 cm.

- Határozzuk meg az egyik száron keletkező, a két kör érintési pontjai által meghatározott szakasz hosszát. (5 pont)
- Igazoljuk, hogy $O_2C = 10,4$ cm. (4 pont)
- Határozzuk meg a háromszög területét. (7 pont)

Megoldás. a) Jelölje az AC száron a beírt kör érintési pontját E_1 , a második kör érintési pontját pedig E_2 . Bocsássunk merőlegest O_2 -ből O_1E_1 -re, a merőleges talppontját jelölje T . A derékszögű O_1O_2T háromszögben $O_1O_2 = 9 + 4 = 13$ cm, $O_1T = 9 - 4 = 5$ cm. Így a Pitagorasz-tétellel $O_2T = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm.



Mivel $TO_2E_2E_1$ téglalap, ezért $E_1E_2 = O_2T = 12$ cm.

b) Az O_1CE_1 és az O_2CE_2 háromszögek hasonlóak, mivel megfelelő oldalaik párhuzamosak. Az O_2C szakasz hosszát jelölje x . Ekkor a két háromszög megfelelő oldalainak aránya: $\frac{13+x}{9} = \frac{x}{4}$, ahonnan $x = 10,4$, az O_2C szakasz hossza tehát valóban 10,4 cm.

c) *I. megoldás.* Az AB szakasz felezőpontját jelölje F . $CF = 9 + 9 + 4 + 10,4 = 32,4$ cm.

Az AFC és az O_2E_2C háromszögek hasonlóak, mert egyik hegyesszögük közös, és mindkettőnek van egy derékszöge, így szögeik megegyeznek. Az AF szakasz hosszát jelölje y . Ekkor a két háromszög megfelelő oldalainak aránya: $\frac{AF}{CF} = \frac{E_2O_2}{CE_2}$. A Pitagorasz-tételből $CE_2 = \sqrt{10,4^2 - 4^2} = 9,6$ cm. $\frac{y}{32,4} = \frac{4}{9,6}$, ahonnan $y = 13,5$, az AF szakasz hossza tehát 13,5 cm.

A háromszög területe tehát

$$T = \frac{AB \cdot CF}{2} = \frac{2AF \cdot CF}{2} = \frac{27 \cdot 32,4}{2} = 437,4 \text{ cm}^2.$$

II. megoldás. Jelölje a háromszög szárai által bezárt szöget 2α . Ekkor $\sin \alpha = \frac{4}{10,4} = \frac{5}{13}$ ($\approx 0,385$). Mivel α hegyesszög, azért

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1 - \frac{25}{169}}} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

(így $2\alpha \approx 45,24^\circ$).

Így $AF = CF \cdot \operatorname{tg} \alpha = 32,4 \cdot \frac{5}{12} = 13,5$ cm. A Pitagorasz-tételből

$$AC = \sqrt{13,5^2 + 32,4^2} = 35,1 \text{ cm.}$$

A háromszög félkerülete:

$$s = \frac{27 + 2 \cdot 35,1}{2} = 48,6 \text{ cm,}$$

területe $T = \rho s = 9 \cdot 48,6 = 437,4 \text{ cm}^2$.

9. Egy nyolcpontú összefüggő, egyszerű gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, G és H . Az A, B, C és D csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. Ehhez hasonlóan az E, F, G és H csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy másik növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. A nyolc csúcs fokszámai között két egyenlő van, a többi fokszám mind különböző, továbbá A fokszáma kisebb E fokszámánál.

a) Rajzoljuk fel ezt a gráfot.

(6 pont)

Egy szabályos nyolcszög két szomszédos csúcsa a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0;0)$ és $B(10;0)$. A nyolcszög az I. és a II. síknegyedben helyezkedik el.

b) Írjuk fel a szabályos nyolcszög beírható körének egyenletét.

(4 pont)

c) Igazoljuk, hogy a $P(17;17)$ pont a nyolcszögnek belső, beírható körének viszont külső pontja.

(6 pont)

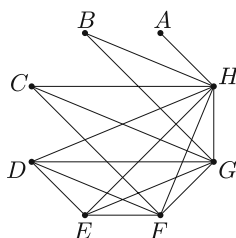
Megoldás. a) Mivel a gráf összefüggő és egyszerű, a csúcsok fokszámai 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 lehetnek.

E számokból a következő növekvő számtani sorozatokat lehet összeállítani:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 3, & 5, & 7; \\ 1, & 2, & 3, & 4; \\ 2, & 3, & 4, & 5; \\ 3, & 4, & 5, & 6; \\ 4, & 5, & 6, & 7. \end{array}$$

Az öt sorozat között csak kettő olyan van, amelyeknek csak egy közös elemük van, ezért a gráf fokszámsorozata (A -tól H -ig) 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7.

Ha H fokszáma 7, akkor ez a csúcs az összes többivel össze van kötve. Mivel A fokszáma 1, ezért A -ból H -n kívül más csúcsba nem vezet él.



G fokszáma 6, ezért G az A -n kívül az összes többi csúccsal össze van kötve. Mivel B fokszáma 2, ezért B -ből a G -n és H -n kívül más csúcsba nem vezet él. F fokszáma 5, ezért F az A -n és B -n kívül az összes többi csúccsal össze van kötve. Mivel C fokszáma 3, ezért C -ből az F -en, G -n és H -n kívül más csúcsba nem vezet él. Végül D és E fokszáma 4, ezért ezek egymással, valamint az F , G és H csúcsokkal vannak összekötve.

b) A szabályos nyolcszög egy belső szöge 135° fokos, így külső szögei 45° fokosak. Ezért BC oldala egy $+1$ meredekségű egyenes egy szakasza.

A 10 egység hosszú BC oldal egy olyan egyenlő szárú, derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói így $5\sqrt{2}$ egység hosszúak. Ezért $C(10 + 5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$.

A nyolcszög további oldalai is vagy párhuzamosak valamelyik koordináta-tengellyel, vagy pedig egy $+1$ vagy -1 meredekségű egyenesen helyezkednek el. Így a további csúcsok koordinátái: $D(10 + 5\sqrt{2}; 10 + 5\sqrt{2})$, $E(10; 10 + 10\sqrt{2})$, $F(0; 10 + 10\sqrt{2})$, $G(-5\sqrt{2}; 10 + 5\sqrt{2})$ és $H(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$.

A nyolcszögbe írható kör középpontja az AE szakasz felezőpontja: $K(5; 5 + 5\sqrt{2})$. A kör sugara megegyezik a K pont második koordinátájával: $r = 5 + 5\sqrt{2}$. A kör egyenlete:

$$(x - 5)^2 + (y - (5 + 5\sqrt{2}))^2 = (5 + 5\sqrt{2})^2 (= 75 + 50\sqrt{2}).$$

c)

$$\begin{aligned} PK^2 &= (17 - 5)^2 + (17 - (5 + 5\sqrt{2}))^2 = 12^2 + (12 - 5\sqrt{2})^2 = \\ &= 338 - 120\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy ez nagyobb, mint a kör sugarának a négyzete, és ekkor P valóban külső pontja a körnek:

$$338 - 120\sqrt{2} > 75 + 50\sqrt{2}, \quad 263 > 170\sqrt{2}, \quad \text{azaz} \quad \frac{263}{170} > \sqrt{2}.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, mert a bal oldal nagyobb, a jobb oldal pedig kisebb $1,5$ -nél.

Másrészt $17 < 10 + 5\sqrt{2}$ ekvivalens $1,4 < \sqrt{2}$ -vel, ami (például a négyzetre emeléssel kapott $1,96 < 2$ miatt) szintén igaz. Ezért P első koordinátája kisebb a C és D csúcsok első koordinátájánál (de nagyobb a többi csúcs első koordinátájánál), valamint kisebb a D és G csúcsok második koordinátájánál (de nagyobb a C és H csúcsok második koordinátájánál), ezért P a $CDGH$ téglalapnak, így a nyolcszögnek is belső pontja.