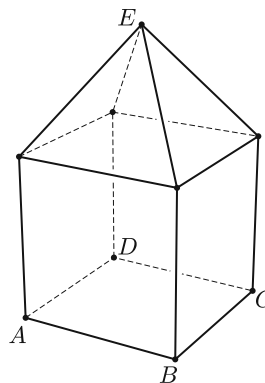
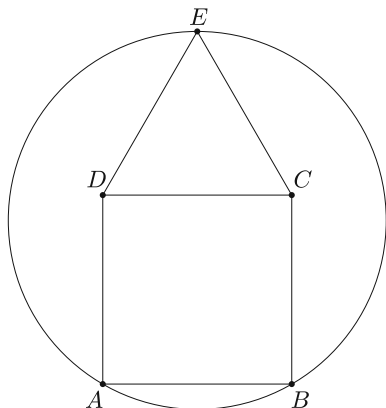


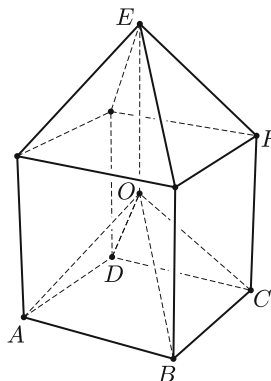
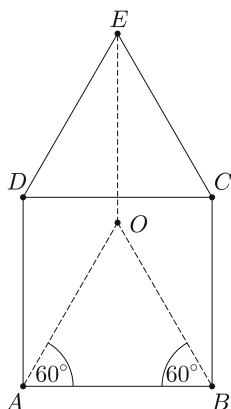
I. rész

1. a) A bal oldali ábrán egy 1 cm oldalhosszú négyzet és rajta egy 1 cm oldalhosszú szabályos háromszög látható. Mekkora annak a körnek a sugara, amely átmegy az A, B, E pontokon? (5 pont)



b) A jobb oldali ábrán egy 1 cm élhosszú kocka és rajta egy olyan 1 cm élhosszú szabályos gúla látható, amelynek minden oldallapja szabályos háromszög. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely átmegy az A, B, C, D, E pontokon? (7 pont)

Megoldás. a) Toljuk el DCE szabályos háromszögünket a $\overrightarrow{CB}$ vektorral. A háromszög képe az eltolás után az ABO szabályos háromszög ($A = D', B = C', O = E'$) lesz; emiatt $OA = OB = 1$. Másfelől mivel $O = E'$ ezért $OE = 1$; azaz O pont az A, B, E köréírt körének a középpontja, és a kör sugara 1 cm.



b) Voltaképpen ugyanazt csináljuk, mint két dimenzióban. Jelöljük a kocka C „fölötti” csúcsát F -fel, és toljuk el a térben a szabályos gúlánkat az $\overrightarrow{FC}$ vektorral. Ekkor a gúla képe az eltolás után az $ABCD O$ szabályos gúla lesz (ahol $O = E'$ az E pont eltolt képe). Mivel $ABCD O$ a megfelelő szabályos gúla képe, ezért $AO = BO = CO = DO = 1$, míg $O = E'$ miatt $EO = 1$, azaz az O pont egyenlő távolságra van A, B, C, D, E pontoktól, vagyis ezen pontok köréírható gömbjének a középpontja, és a gömb sugara 1 cm.

Megjegyzés. A feladat megoldható számolással is, de mi nem ezt az utat követtük.

2. Egy 2019 mezőből álló játéktáblánk van a következő ábra szerint:

1	2	3	4	5	1	2	...
---	---	---	---	---	---	---	-----

(Az 1, 2, 3, 4, 5 számok vannak rajta ciklikusan, összesen 2019 hosszan.) Az 1-es mezőről indulunk, és minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám.

a) Összesen hányra lépünk rá a mezők közül? (4 pont)

b) Mennyi azon mezők számainak összege, amire nem lépünk rá? (3 pont)

c) A játékszabályokat a következőképpen módosítjuk: egy szabályos hatoldalú kockával dobunk, ha a dobás eredménye az 1 és 5 közötti d szám, akkor az első mező, amire rálépünk az első d ; míg ha a dobás hatos, akkor az első 1-esre lépünk, és innentől kezdve minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám. Az első száz mező közül várhatóan hány mezőt látogatunk meg? (4 pont)

Megoldás. a) Megvizsgálva az első pár lépést azt kapjuk, hogy az első tizenegy mező közül rendre az $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3$ (ez már a második 3-as) $\Rightarrow 1$ (ez már a harmadik 1-es) lépünk. Mivel innen ciklikusan ismétlődnek a mezők, tíz egymás utáni mezőből pontosan 4-re lépünk rá. $2019 = 201 \cdot 10 + 9$, azaz lesz 201 darab teljes ciklusunk, valamint további 9 mezőnk. Az utolsó 9 mező közül 4-re lépünk rá, így összesen $201 \cdot 4 + 4 = 808$ mezőre lépünk rá.

b) Egy teljes ciklusban a meg nem látogatott mezők összege: $3 + 5 + 1 + 2 + 4 + 5 = 20$, míg az utolsó 9 mező közül (hiányzik egy 5-ös a teljes ciklushoz) a meg nem látogatottak összege csak 15. Azaz azon mezők összege, amire nem lépünk rá: $201 \cdot 20 + 15 = 4035$.

c) A módosított szabályok szerint $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ eséllyel az első 1-es mezőről indulok, míg az első 2-es, $\dots$, 5-ös mezőről indulás esélye $\frac{1}{6}$. Az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es mezőről indulva rendre ugyanazt az 1, 2, 4, 3 ciklust kapjuk, csak az elején, illetve a végén különböznek. Ez alapján 1, 2, 3, 4-gyel kezdve az első 100 mező közül rendre 40, 39, 40, 38 mezőre lépünk rá; míg az első 5-ösből indulva pontosan az 5-ösöket látogatjuk meg, így összesen 20 darab mezőt. Innen a meglátogatott mezők várható száma:

$$\frac{2 \cdot 40 + 39 + 40 + 38 + 20}{6} = \frac{217}{6} \approx 36,17.$$

3. Pizskos Fred a kapitány hosszú tengeri útra indul hajójával. Egy 100 literes hordóban tiszta alkoholt visz magával. Fred a hordóból minden éjfélkor megiszik 5 liter lötytyöt, majd felmegy a hídra és a hajó kormánykereket eltekeri 30° -kal. Ezek után visszavonul a kabinjába és a következő éjfélig alszik. A matrózok minden nappal során feltöltik a hordót esővízzel, de a kormánykerékhez nem nyúlunk. Ha a hordó alkoholtartalma 50% alá csökken és a kapitány iszik belőle, akkor kijózanodik.

a) Az indulás után hanyadik éjfélkor józanodik ki Fred? (4 pont)

Fred fogadott egy hordó rumba Watson kapitánnyal, hogy az ő hajója gyorsabb, mint Watson fregattja. A verseny április elsején 23 óra 59-kor indult. A két hajó egyszerre indult el a nyugati irányban pontosan 10 000 kilométerre lévő közös célpont, a Rejtő-fok felé. Watson hajója állandó 8 csomó sebességgel haladt, míg Fred teknője 6 csomóval.

(1 csomó sebesség megegyezik $1,85 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val.) Fred amíg részeg, minden páros sorszámú nap éjjelén balra tekeri 30° -kal a kormánykereket, míg a páratlan sorszámú napokon jobbra; amikor viszont kijózanodik, akkor azonnal a megfelelő irányba állítja a kormánykereket (és a helyes irányt a továbbiakban tartja is). A józan Pizskos Fred továbbá minden éjfélkor képes a hajó aktuális sebességét 10%-kal növelni (és ezt az egész következő nap tartani).

b) Melyik kapitány nyeri a fogadást? (9 pont)

Megoldás. a) A feladat szövege alapján az indulás időpontjában $a_0 = 1$ (azaz 100%) a hordó alkoholtartalma. Mivel minden újabb időpontban elfogy 5 liter lötyty, amit 5 liter 0%-os alkoholtartalmú vízzel pótolnak, így n nap múlva a hordó alkoholtartalma: $a_n = 0,95^n$. A kapitány akkor józanodik ki, ha $a_n < 0,5$ lesz. A megfelelő egyenletet megoldva: $0,95^n = 0,5 \Rightarrow n = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,95} \approx 13,51$; mivel a $0,95^x$ függvény szigorúan monoton csökken ez azt jelenti, hogy $a_{13} > 0,5$, de $a_{14} < 0,5$, azaz Fred pontosan az indulás után két héttel józanodik ki.

b) Először számoljuk ki, hogy az egyenletes sebességgel pontosan a cél irányába mozgó Watson mennyi idő alatt éri el a Rejtő-fokot.

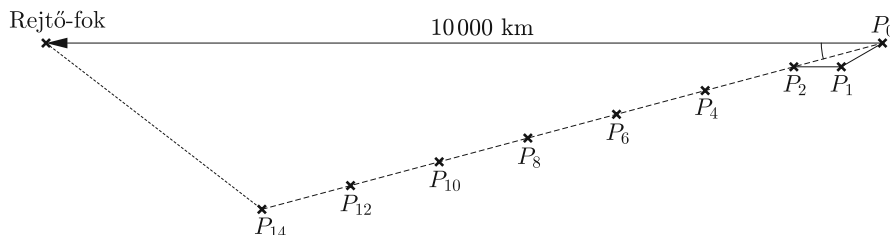
$$v_w = 8 \cdot 1,85 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 14,8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow t_w = \frac{10\,000 \text{ km}}{14,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 675,68 \text{ h} \approx 28 \text{ nap és } 3,68 \text{ h}$$

alatt ér célba.

Most lássuk mit csinált eközben Fred. Fred sebessége kezdetben

$$v_F = 6 \cdot 1,85 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 11,1 \frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow s = 11,1 \cdot 24 = 266,4 \text{ km-t}$$

tesz meg 1 nap alatt Pizskos Fred. Használjuk a következő ábra jelöléseit.



Jelölje $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{14}$ Fred hajójának a pozícióját rendre a startnál, illetve 1, 2, $\dots$ és 14 nap múlva. Mivel a párosadik napokon balra, a páratlanadik napokon jobbra fordítja el a kormányt Fred, ezért minden második nap pontosan nyugat felé halad a hajó, illetve két ilyen napot „összevonva” egy olyan rombusz két szomszédos oldalán halad

végig Fred teknője, amelynek oldalai 266,4 km hosszúak és az általuk bezárt szög 150° . Innen két másodszomszédos éjféli időpont pozíciója között (pl. P_0 és P_2 , vagy P_{12} és P_{14} között) a távolság számítható koszinusz-tétellel:

$$P_0P_2^2 = 266,4^2 + 266,4^2 - 2 \cdot 266,4 \cdot 266,4 \cdot \cos 150^\circ \approx 264\,859,8 \Rightarrow \\ \Rightarrow P_0P_2 \approx 514,645 \text{ km.}$$

Azaz két hét alatt Fred a starttól $514,645 \cdot 7 = 3602,515$ km-re került és pontosan 15° -kal tért el a nyugati iránytól.

Számítsuk ki egy újabb koszinusz tétellel, mennyi út van még hátra (a pontos irányt hagyjuk meg a Kapitánynak). A hátralévő útra:

$$s_F^2 = 10\,000^2 + 3602,515^2 - 2 \cdot 10\,000 \cdot 3602,515 \cdot \cos 15^\circ \approx 43\,382\,869 \Rightarrow \\ \Rightarrow s_F \approx 6586,567 \text{ km}$$

út van még hátra két hét után.

Lássuk, mennyi idő alatt teszi meg a józan Fred ezt az utat. Jelöljük b_n -nel a két hét utáni n -edik napon Fred hajója által megtett utat (kilométerben). Ekkor $b_n = 266,4 \cdot 1,1^{n-1}$. Az első n nap során ekkor

$$s_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 266,4 \cdot \frac{1,1^n - 1}{1,1 - 1} = 2664(1,1^n - 1) = 2664 \cdot 1,1^n - 2664 \text{ km-t}$$

tesz meg. Azt keressük, hogy mikor lesz $s_n = 6586,567$.

$$s_n = 2664 \cdot 1,1^n - 2664 = 6586,567 \Rightarrow 2664 \cdot 1,1^n = 9250,567 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1,1^n = \frac{9250,567}{2664} \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{9250,567}{2664}\right)}{\ln 1,1} \approx 13,061.$$

Mivel az $1,1^x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért ez azt jelenti, hogy (kijózanodása után) 13 nap alatt még nem ér célba Fred, de a 14-dik, vagyis összességében a 28-dik napon már eléri a Rejtő-fokot.

Azaz Piszkos Fred nyeri a fogadást (és így a hordó rumot), hiszen körülbelül egy nappal korábban ér a célba, mint Watson.

a) Igazoljuk, hogy az $A_1A_2A_3$, a $B_1B_2B_3$, valamint a $C_1C_2C_3$ háromszögek mind derékszögű háromszögek.

(4 pont)

b) Igazoljuk, hogy az A_3 , B_1 , B_2 , valamint a B_3 , C_1 , C_2 , illetve a C_3 , A_1 , A_2 ponthármasok rendre egy-egy egyenesre esnek.

(3 pont)

c) A park építész egy „különleges” helyre kutat szeretne fúrtni. Úgy tűnik neki, hogy a parkot alkotó három kör egy közös pontban metszi egymást (ami eléggé különleges lenne). Igaza van-e az építésznek? Ha igen, pontosan hol van ez a pont?

(8 pont)

Megoldás. a) Az ábra alapján úgy tűnik, hogy a háromszögek olyan háromszögek, ahol a 2-es indexű csúcs szöge derékszög, míg a másik két csúcsot összekötő átfogó egyben a kör átmérője is. Ezt fogjuk igazolni.

Az A_1 , A_3 pontok távolsága 10, az O_A felezőpontjuk koordinátái: $O_A(-2; -2)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 5 távolságra van A_2 -től, azaz ez a háromszög egyenlőszárú és derékszögű háromszög, és a köréírt kör sugara 5.

Hasonlóan a C_1 , C_3 pontok távolsága 6, az O_C felezőpontjuk koordinátái: $O_C(2; 4)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 3 távolságra van C_2 -től, azaz ez a háromszög is egyenlőszárú és derékszögű háromszög, és a köréírt kör sugara 3.

Míg a B_1 , B_3 pontok távolsága Pitagorasz tételével: $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, az O_B felezőpontjuk koordinátái: $O_B(5; -3)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 5 távolságra van B_2 -től, azaz ez a háromszög is derékszögű háromszög (de nem egyenlőszárú), és a köréírt kör sugara 5.

b) Azt fogjuk használni, hogy ha a P , Q , R pontokra igaz az, hogy $\overrightarrow{PQ} = c \cdot \overrightarrow{PR}$ valamely c valós számra, akkor a három pont egy egyenesre esik.

Az A_3 , B_1 , B_2 pontokra: $\overrightarrow{A_3B_1} = (3; 1)$, míg $\overrightarrow{A_3B_2} = (12; 4) = 4 \cdot \overrightarrow{A_3B_1}$, azaz A_3 , B_1 , B_2 valóban egy egyenesre esnek.

A B_3 , C_1 , C_2 pontokra: $\overrightarrow{B_3C_1} = (-4; 4)$, míg $\overrightarrow{B_3C_2} = (-7; 7) = \frac{7}{4} \cdot \overrightarrow{B_3C_1}$, azaz a B_3 , C_1 , C_2 pontok is egy egyenesre esnek.

A C_3 , A_1 , A_2 pontokra: $\overrightarrow{C_3A_1} = (-1; -1)$, míg $\overrightarrow{C_3A_2} = (-6; -6) = 6 \cdot \overrightarrow{C_3A_1}$, azaz a C_3 , A_1 , A_2 pontok is egy egyenesre esnek.

c) Az a) pont alapján a körök egyenletei rendre: $k_A: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$; $k_B: (x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$; $k_C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$.

Számítsuk ki k_A és k_B metszéspontjait. Ezekre a metszéspontokra igaz:

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow 14x - 26 = 2y \Rightarrow y = 7x - 13.$$

Ezt a (hatványvonal) egyenletet visszahelyettesítve mondjuk k_A egyenletébe kapjuk:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + (7x-11)^2 &= 25 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + 49x^2 - 154x + 121 - 25 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 50x^2 - 150x + 100 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0.\end{aligned}$$

Innen a k_A és k_B körök metszéspontjai: $(1; -6)$ és $(2; 1)$.

Ha ezek közül bármelyik rajta van a harmadik körön, akkor készen vagyunk. Vizsgáljuk meg, hogy a $(2; 1)$ pont koordinátái teljesítik-e a harmadik köregyenletet. $(2-2)^2 + (1-4)^2 = 0^2 + (-3)^2 = 9$, azaz ez a metszéspont rajta van a k_C körön is (a másik metszéspont nincs rajta).

Ezzel megvagyunk, a három kör valóban egy közös pontban, a $(2; 1)$ pontban metszi egymást.

II. rész

5. a) Adjuk meg a $h(x) = \cos 2x - \sin 2x + 2 \sin^2 x + 1$ függvény szélsőértékeit. Hol veszi fel a szélsőértékeit a függvény? (6 pont)

b) Legyen $f(x) = x^2 - 2x + 2$, míg a $g_n(x)$ a következőképpen definiált függvény-sorozat:

$$g_1(x) = f(x); \quad g_n(x) = f(g_{n-1}(x)) \quad (\text{ha } n \geq 2).$$

Adjuk meg $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ tizedesvessző utáni első 100 számjegyet. (10 pont)

Megoldás. a) A duplaszögek addíciós képleteivel:

$$\begin{aligned}h(x) &= \cos 2x - \sin 2x + 2 \sin^2 x + 1 = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x + 1 = \\ &= \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + 1 = (\cos x - \sin x)^2 + 1.\end{aligned}$$

Mivel $(\cos x - \sin x)^2 \geq 0$, ezért $h(x) \geq 1$ és ezt az 1 minimumértéket $h(x)$ fel is veszi mindenütt, ahol $\cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1$, azaz a minimum helyei: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Maximum ott lehet, ahol a $j(x) = \cos x - \sin x$ különbségnek pozitív maximuma, vagy negatív minimuma van. Deriváljuk a $j(x)$ függvényt:

$$\begin{aligned}j'(x) &= -\sin x - \cos x, \\ j'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

„Minden” esetben $j''(x) = -\cos x + \sin x \neq 0$, azaz ezek valódi szélsőértékei $j(x)$ -nek, és mivel ezeken a helyeken $|j(x)| = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, ezért minden ilyen helyre $(\cos x - \sin x)^2 + 1 = j^2(x) + 1 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3$.

Azaz $h(x)$ maximuma 3 és a maximumának helyei: $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Írjuk fel $f(x)$ -t $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ alakban, és vizsgáljuk meg a $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots$ függvények értékeit $x = \frac{3}{2}$ -nél.

$$g_1\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{2^1} + 1$$

(ezt ne is alakítsuk tovább);

$$\begin{aligned}g_2\left(\frac{3}{2}\right) &= f\left(g_1\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{4} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \frac{1}{16} + 1 = \frac{1}{2^{2^2}} + 1; \\ g_3\left(\frac{3}{2}\right) &= f\left(g_2\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{16} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \frac{1}{256} + 1 = \frac{1}{2^{2^3}} + 1.\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2^{2^n}} + 1\right) &= \left(\frac{1}{2^{2^n}} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{(2^{2^n})^2} + 1 = \\ &= \frac{1}{2^{2^n \cdot 2}} + 1 = \frac{1}{2^{2^{n+1}}} + 1,\end{aligned}$$

ezért adódik, hogy $g_n\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^{2^n}} + 1$, azaz $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^{2^{2019}}} + 1$.

Vizsgáljuk csak $\frac{1}{2^{2^{2019}}}$ -t.

$$0 < \frac{1}{2^{2^{2019}}} < \frac{1}{2^{2019}} < \frac{1}{2^{334}} < \frac{1}{10^{100}}$$

(ez utóbbi $1024 = 2^{10} > 10^3 = 1000$ miatt igaz); azaz $\frac{1}{2^{2^{2019}}}$, és így $\frac{1}{2^{2^{2019}}} + 1 = g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ tizedesvessző utáni első száz jegye mind 0.

6. Néhány vegyianyag-szállító kamionban különféle kóddal (A, B, C, D, E, F, G, H) ellátott palackokat szállítanak. A robbanásveszély miatt bizonyos palackokat nem szabad együtt szállítani. Ezeket a „tiltásokat” a következő táblázat tartalmazza:

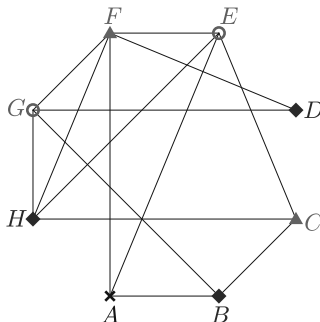
Vegyi anyag címkéje:	A	B	C	D
Ezzel nem szállítható:	B, E, F	A, C, G	B, E, H	F, G
Vegyi anyag címkéje:	E	F	G	H
Ezzel nem szállítható:	A, C, F, H	A, D, E, G, H	B, D, F, H	C, E, F, G

a) Legalább hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan egy-egy palackot kell elszállítanunk? (Minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) (6 pont)

b) Hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan 5-5 palackot kell elszállítani? (Most is minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) (6 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztva két különböző palackot mennyi az esélye annak, hogy azokat nem tehetjük egy kamionra? (4 pont)

Megoldás. a) Rajzoljuk meg a feladat gráfját (két vegyianyag-kódot akkor kötünk össze, ha a két palack nem szállítható együtt).



Színezzük ki a gráf csúcsait úgy, hogy bármely két olyan csúcs, amit él köt össze, különböző színt kapjon. Megmutatjuk, hogy bármely ilyen színezéshez legalább négy szín kell (azaz a gráf csúcs-kromatikus száma 4), ami azt jelenti, hogy legalább négy kamion kell a palackok szállításához. Indirekt tegyük fel, hogy a gráf csúcsai 3 színnel jól színezhetők. Ekkor a teljes 3-klikket alkotó F, G, H csúcsoknál ezt a három színt fel is kell használnunk. Legyen F, G, H színe rendre zöld, piros és kék; (innen fonalasán) $\Rightarrow E$ színe csak piros, D színe csak kék, C színe csak zöld, B színe csak kék lehet (mert mindegyiknek van másik két színű szomszédja). Ekkor viszont A csúcsnak lesz piros (E), kék (B) és zöld (F) színű szomszédja is, vagyis A megszínezéséhez szükséges egy negyedik szín is. Ezzel igazoltuk, hogy a gráf csúcs-kromatikus száma legalább 4; 4 színnel pedig (mondjuk A -t sárgának választva) a csúcsok jól színezhetők.

Az eddigiek alapján a szállításhoz legalább 4 kamion kell (az azonos színekkel jelölt palackok kerülnek egy kamionba). Egy lehetséges szétosztás:

1. kamion	2. kamion	3. kamion	4. kamion
A	B, H, D	C, F	E, G

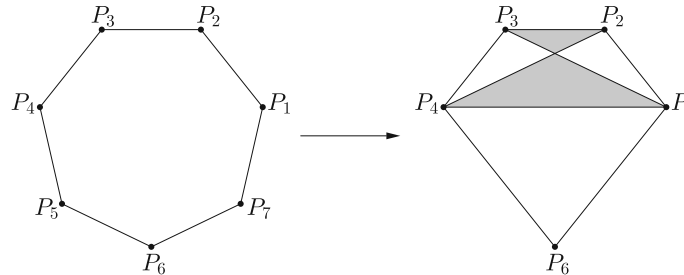
b) Mivel 40 palack van, ezért minimum 10 kamion kell. Ez viszont elég is, ahogyan a következő táblázat mutatja (nagyon sok különböző megoldás lehet).

1. kamion	2. kamion	3. kamion	4. kamion	5. kamion
$AAAH$	$BBBB$	$CCCC$	$AACD$	$DDDD$
6. kamion	7. kamion	8. kamion	9. kamion	10. kamion
$BEEF$	$EEEG$	$FFFF$	$GGGG$	$HHHH$

c) A feladat grájában 14 él van (a táblázatbeli bejegyzések száma 28, de a szimmetria miatt ez 14 párt jelent); azaz pontosan 14 pár olyan palack van, amik nem kerülhetnek össze. Innen a kérdéses valószínűség:

$$P = \frac{\text{„kedvező” párok száma}}{\text{összes párok száma}} = \frac{14}{\binom{8}{2}} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}.$$

7. Egy cég gyémánt alakú emblémája olyan ötszög, melynek csúcsai egy szabályos hétszög megfelelő $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_6)$ csúcsai (lásd jobb oldali ábra).



A cég 10 000 darab az emblémával ellátott kitűzőt rendelt. A nyomdai költségekben két tétellel kell kalkulálni: 10 000 centiméternyi vonal megrajzolása 50 euróba kerül, míg 10 000 cm²-nyi terület besatírozása 200 euróba.

- a) Mennyi lesz a 10 000 kitűző nyomdai költsége, ha a szabályos hétszög egy-egy oldala 2 cm hosszú? (10 pont)
 b) A cég piárosa úgy találta, hogy az embléma nem elég színes. Szeretné a gyémánt 5 összefüggő részében megjeleníteni a piros, a fehér és a zöld színeket. Hányféle különböző ilyen három színű emblémát kaphatunk, ha azt szeretnénk, hogy az élben szomszédos részek színe különböző legyen, valamint mind a három szín meg is jelenjen az emblémában? (6 pont)

Megoldás. a) Számítsuk ki a szabályos hétszög kétféle átlójának a hosszát. Koszinusztétellel:

$$P_1P_3^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{900^\circ}{7} \approx 12,988 \Rightarrow P_1P_3 \approx 3,604,$$

míg

$$P_1P_4^2 = 2^2 + P_1P_3^2 - 2 \cdot 2 \cdot P_1P_3 \cdot \cos \left(\frac{900^\circ}{7} \cdot \frac{4}{5} \right) \approx 20,196 \Rightarrow P_1P_4 \approx 4,494.$$

Innen a vonalak megrajzolásának költsége:

$$\approx (3 \cdot 2 + 4 \cdot 3,604 + 4,494) \cdot 50 = 24,91 \cdot 50 = 1245,5 \text{ euró.}$$

Kiszámoljuk a satírozott részek területeit is. A P_1P_3 és P_2P_4 metszéspontját jelöljük O -val. P_2P_3O olyan egyenlőszárú háromszög, melynek P_2P_3 alapja 2 cm hosszú, míg alapján fekvő szögei nagysága: $\frac{180^\circ}{7}$, innen az alaphoz tartozó m magasságra: $\operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ}{7} \right) = m \approx 0,4816$ és így

$$T_{P_2P_3O} \approx \frac{2 \cdot 0,4816}{2} = 0,4816.$$

A P_1P_4O háromszög pedig hasonló P_2P_3O -hoz, és a hasonlóság aránya éppen $\lambda = \frac{P_1P_4}{P_2P_3} \approx \frac{4,494}{2} = 2,247$, innen $T_{P_1P_4O} \approx 2,247^2 \cdot 0,4816 \approx 2,4314$. Innen a satírozás költsége: $\approx (0,4816 + 2,4314) \cdot 200 = 582,6$ euró.

Azaz a nyomdai összköltség hozzávetőlegesen: $1245,5 + 582,6 = 1828,1$ euró.

b) Jelöljük lentről felfele a részeket R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 -tel (R_2 az az egyetlen rész, amelynek 3 szomszédja van, az R_3, R_4 részek az egybevágó kisebb háromszögek.)

– R_2 kitöltésére 3 lehetőségünk van.

– Ha ekkor R_3 és R_4 színe különböző (ez kétféleképpen lehetséges), akkor R_5 színénél nincs választási lehetőségünk, ugyanazt a színt kapja R_5 , mint R_2 ; viszont R_1 -re két különböző színt is választhatunk. Az esetek száma itt $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$.

– Ha azonban R_3 és R_4 színe azonos (ez is kétféleképpen lehetséges), akkor eddig csak két színt használtunk fel, azaz vagy R_1 , vagy R_5 (vagy mindkettő) színe a harmadik szín kell, hogy legyen. Ha csak R_1 kapja a harmadik színt, akkor R_5 színe egyértelmű, hasonlóan ha csak R_5 kapja a harmadik színt, akkor R_1 színe egyértelmű, és az is egyértelmű eset, ha mindkét területet a harmadik színnel színezzem (ez így összesen háromféle lehetséges színezés); azaz ezen az ágon $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ lehetséges eset van.

Összesen tehát $12 + 18 = 30$ -féleképp lehet kiszínezni az emblémát.

8. Egy speciális trópusi halaknak való felül nyitott, alul és oldalt üveg akváriumot építünk. Az akvárium paramétereire EU-előírások alapján a következőknek kell teljesülnie:

- Az akvárium térfogata 1 m^3 kell, hogy legyen;
- az akvárium alapja olyan téglalap, melynél az oldalak aránya $1 : 2$;
- a négy oldalfal olyan üvegből készül, melynek ára 90 euró négyzetméterenként;
- az akvárium alsó lapja pedig olyan üvegből készül, melynek négyzetmétere 120 euróba kerül.

Milyennek válasszuk az akvárium éleit, hogy a lehető legkevesebb legyen az anyagköltség, és az hány euró lesz? (16 pont)

Megoldás. Jelöljük az akvárium alaplapjának oldalait $x, 2x$ -szel (a 2. feltétel alapján), míg a magasságát y -nal. Ekkor a feltételek alapján $V = 2x^2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2x^2}$. Az anyagköltségfüggvényt $f(x, y)$ -nak nevezve pedig teljesül:

$$f(x, y) = 2x^2 \cdot 120 + 2(2xy) \cdot 90 + 2(xy) \cdot 90 = 240x^2 + 540xy.$$

Ennek a költségfüggvénynek szeretnénk a (lokális) szélsőértékeit megtalálni.

$f(x, y)$ -ba behelyettesítve $y = \frac{1}{2x^2}$ -t a költségfüggvény már csak x -től függ: $f(x) = 240x^2 + \frac{270}{x}$.

$$f'(x) = 480x - \frac{270}{x^2},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 480x = \frac{270}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{270}{480} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{48}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{6}} \approx 0,8255.$$

Vizsgáljuk meg $f(x)$ második deriváltját is: $f''(x) = 480 + \frac{540}{x^3} > 0$, azaz a függvénynek a kapott helyen valóban lokális minimuma van. Számoljuk ki y -t:

$$y = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{9}{4\sqrt[3]{36}}} = \frac{2\sqrt[3]{36}}{9} \approx 0,7338.$$

Azt kaptuk, hogy az optimális akvárium alapélei, illetve magassága (méterben): $x \approx 0,8255$; $2x \approx 1,651$; $y \approx 0,7338$ és ekkor a (minimális) anyagköltség: $f(x, y) \approx 490,6 \text{ euró}$.

9. Hány olyan $0 < \frac{a}{b} < 1$ és $0 < \frac{c}{d} < 1$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$) nem egyszerűsíthető közös nevezőre tört van, hogy az

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right)$$

szorzat egész, valamint $a + b + c + d = 100$?

(16 pont)

Megoldás. Mivel $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in (0, 1)$ és 0 és 1 közé esik, azért $1 < \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right) < 4$, azaz a szorzat csak 2 , vagy 3 lehet. A két esetet külön vizsgáljuk.

Ha

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right) = 2 \Rightarrow 1 + \frac{c}{d} = \frac{2b}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{2b}{a+b} - 1 = \frac{b-a}{a+b}.$$

Ha a törtek nem egyszerűsíthetők, akkor $c = b - a$, és $d = a + b$ kell, hogy teljesüljön, ráadásul a -nak és b -nek különböző paritásúnak kell lennie (mert különben c és d is páros, és így $\frac{c}{d}$ egyszerűsíthető lenne).

Mivel $a + b + c + d = 100 \Rightarrow a + b + b - a + a + b = a + 3b = 100 \Rightarrow a = 100 - 3b$. Innen ha b páratlan, akkor $a = 100 - 3b$ is páratlan; míg ha b páros, akkor a is páros. Ekkor viszont (bármelyik esetben) $c = b - a$ és $d = b + a$ is páros ellentmondásban azzal, hogy a $\frac{c}{d}$ tört nem egyszerűsíthető. Azaz ezen az ágon nem kapunk megoldást.

Ha

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right) = 3 \Rightarrow 1 + \frac{c}{d} = \frac{3b}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{3b}{a+b} - 1 = \frac{2b-a}{a+b}.$$

Ha a törtek nem egyszerűsíthetők, akkor $c = 2b - a$, és $d = a + b$ kell, hogy teljesüljön.

Mivel $a + b + c + d = 100 \Rightarrow a + b + 2b - a + a + b = a + 4b = 100 \Rightarrow b = 25 - \frac{a}{4}$. Innen a 4-gyel osztható szám, míg b nagyobb, de legfeljebb kétszer akkora (az eddigiek alapján). A lehetőségeket a, b -re (és a számolt c, d -re) soroljuk fel egy táblázatban.

a	b	$c = 2b - a$	$d = b + a$	
4	24	44	28	a törtek egyszerűsíthetőek
8	23	38	31	$c > d$ így $c/d > 1$
12	22	32	34	a törtek egyszerűsíthetőek
16	21	26	37	ez megoldás
20	20	20	40	a törtek egyszerűsíthetőek, illetve $a \geq b$

Vagyis azt kaptuk, hogy az egyetlen megoldás: $a = 16$, $b = 21$, $c = 26$, $d = 37$.

Ezt leellenőrizve (a, b illetve c, d valóban relatív prímek)

$$\left(1 + \frac{16}{21}\right) \left(1 + \frac{26}{37}\right) = \left(\frac{37}{21}\right) \left(\frac{63}{37}\right) = \frac{63}{21} = 3.$$