

Második nap¹

4. Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (k, n) számpárt, amire

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Matolcsi Dávid megoldása. Legyen

$$T = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

T -ben a 2 kitevője $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$. A $k!$ -ban a 2 kitevője

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{k}{2^i} \right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{2^i} = k.$$

Tehát, ha $k! = T$, akkor $\frac{n(n-1)}{2} \leq k$.

Nilván $T < (2^n)^n = 2^{n^2}$, és

$$k! > \prod_{j=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^k j > \left(\frac{k}{2} \right)^{\frac{k}{2}} \geq \left(\frac{n^2 - n}{4} \right)^{\frac{n^2 - n}{4}}.$$

Így, ha $T = k!$, akkor

$$2^{n^2} > \left(\frac{n^2 - n}{4} \right)^{\frac{n^2 - n}{4}}.$$

Az $\frac{n^2}{4}$ gyök vonása szigorúan monoton növekvő függvény, így

$$2^4 > \left(\frac{n^2 - n}{4} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Itt $n \geq 11$ -re

$$\left(\frac{n^2 - n}{4} \right)^{\frac{n-1}{n}} > 27^{\frac{10}{11}}, \quad \text{és} \quad \frac{27^{10}}{16^{11}} > \frac{1,5^{10}}{16} > 1.$$

Ezek alapján $27^{10} > 16^{11}$, tehát $27^{\frac{10}{11}} > 16 = 2^4$. Vagyis $n \geq 11$ -re nem teljesülhet az egyenlőség, azaz $n \leq 10$.

Az $n = 1$ -re $T = 1$, ekkor $k = 1$ jó megoldás; $n = 2$ -re pedig $T = 6$, így $k = 3$ is jó megoldás.

Az $n = 3$ -ra $T = 168$, erről könnyen ellenőrizhető, hogy nem írható fel $k!$ alakban.

Az $n = 4$ -re $T = 15 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 8$, ez sem írható föl $k!$ alakban.

Ha $n \geq 5$, akkor T osztható $2^n - 2^{n-5} = 31 \cdot 2^{n-5}$ -nel, tehát osztható 31-gyel.

Így, ha $T = k!$, akkor $k \geq 31$. Ekkor viszont $k! > 16^{16} = 2^{64}$, ezért $2^{n^2} > T$ miatt $n > 8$, azaz $n \geq 9$, így T osztható $2^n - 2^{n-7}$ -nel, ami osztható 127-tel. Ha viszont $k!$ osztható 127-tel, akkor $k \geq 127$, így $k! > 60^{60} > 2^{300}$ szerint $n > 17$. Ez azonban lehetetlen, mert már beláttuk, hogy $n \leq 10$.

Tehát csak két megoldása van a feladatban szereplő egyenlőségnek: $n = 1$ és $k = 1$, illetve $n = 2$ és $k = 3$.

5. Bath Bankja értéket bocsát ki, melyeknek egyik oldalán H , másik oldalán T betű látható. Harrynek n ilyen értéke van, amelyek előtte balról jobbra, egy sorban vannak elrendezve. Harry ismételten végrehajtja a következő műveletet: ha pontosan $k > 0$ olyan érme van, amin H van felül, akkor megfordítja a balról k -adik érmét; máskülönben minden érmén T van felül, és ekkor Harry megáll. Például $n = 3$ esetén a THT sorozatból indulva $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ a lépések sorozata, ami három lépés után megáll.

(a) Bizonyítsuk be, hogy bármi legyen is a kiindulási sorozat, Harry véges sok lépés után megáll.

(b) Minden C kiindulási sorozatra jelölje $L(C)$ azt a lépésszámot, ahány lépés után Harry megáll. Például $L(THT) = 3$ és $L(TTT) = 0$. Határozzuk meg $L(C)$ átlagos értékét, amint C végigfut a 2^n lehetséges kiinduló sorozaton.

¹ Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

Nagy Nándor megoldása. (a) Tekintsük azt a mutatót, amely mindig éppen a k -adik érmére mutat. Mivel minden fordítás során k értéke pontosan eggyel változik meg, ezért a fordítás után a mutató H és T esetén rendre balra, illetve jobbra lép egyet.

Hogyha a mutatótól jobbra már nincsen H érme, akkor pontosan k lépésen belül fejeződik be az eljárás, hiszen ekkor az első k érme mind H oldalával van felül.

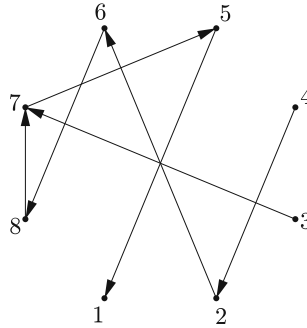
Minden más helyzetben k véges sok lépésben megdönti saját korábbi rekordját. Ennek igazolásához haladjunk végig a rekordokon. Abban az esetben, ha a mutató helyén T van, akkor egyből jobbra lép, k értéke 1-gyel nő, azaz megdöntötte a rekordot. Egyébként pedig egészen addig lép balra, amíg H oldalú érmékre mutat, de lesz tőle balra T oldalú is, hiszen az eltérő esetet már megvizsgáltuk. Ennél az érménél megfordul a mutató mozgása, és az imént T -re fordított elemeken is jobbra fog lépni a mutató, vagyis ismét megdönti a rekordját.

Tehát véges sok lépés alatt elő fog fordulni, hogy az első k érme H oldalával van felül, hiszen a rekord legfeljebb n lehet.

(b) Létezik bijekció az n érméből álló összes állapot és az $n + 1$ érméből álló H -ra végződő összes állapot között, amelyre az egyes állapotok irányított gráfja izomorf lesz: A bijekcióhoz fordítsunk minden érmét a túloldalára, ezután az egész sorozatot tükrözzük (eleje és vége helyet cserél) és a sorozat végére tegyünk még egy H érmét.

Az $n = 3$ esethez tartozó állapotok:

I.	TTT	TTH	THT	THH	HTT	HTH	HHT	HHH
	1	2	3	4	5	6	7	8
II.	HHHH	THHH	HTHH	TTHH	HHTH	THTH	HTTH	TTTH
	1	2	3	4	5	6	7	8



Az $n = 3$ esethez tartozó irányított gráf

Ha az I. esetben k darab H érme volt, akkor a II. esetben $n - k + 1$ lesz, így a mutató pozíciója az I. esetben a k ., míg a II.-ban az $n - k + 1$. helyen van. Mivel az érméket megfordítottuk, tükröztük és a végére tettünk még egy (H) érmét, így az I. esetbeli k . érme a II. esetben éppen az $n - k + 1$., és a másik oldala van felül. Tehát a mutató éppen az ellenkező irányba mozog a II. esetben, mint az I. esetben, és a II. esetbeli új állapot éppen az I. esetbeli új állapot bijekció szerinti megfeleltetése. Az n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $L(C)$ várható értéke $\frac{n(n+1)}{4}$.

Kiinduló lépésként tekintsük az $n = 1$ esetet, ahol valóban $\frac{1}{2}$ a lépésszám várható értéke. Az indukciós lépés során n -ről $(n + 1)$ -re lépünk, és két esetet különböztetünk meg:

- Ha a sorozat utolsó érméje T (az esetek fele), akkor a mutató pontosan ugyanúgy viselkedik, mint n érme esetén.
- Különben pedig idáig (az utolsó érméig) el kell jutnia egyszer a mutatónak, ami csakis akkor lehet, ha már az összes érme H oldalát mutatja. Minden egyes ilyen lépéssorozatnak a bijekció miatt megfeleltethető egy lépéssorozat az előző esetből, vagyis a mutató a végig H állapotig várható értékben $\frac{n(n+1)}{4}$ lépést fog tenni. Persze még el kell érni a végig T állapotot, ami további $n + 1$ lépést igényel.

Mivel a két eset egyformán valószínű, így az $L(C)$ várható értéke a két szám átlaga:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} + (n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{4},$$

tehát működik az indukciós lépés.

6. A hegyesszögű ABC háromszög, amiben $AB \neq AC$, beírt körének a középpontja I . Az ABC háromszög ω beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre a D , E , F pontokban érinti. A D -ből EF -re bocsátott merőleges egyenes és az ω kör második metszéspontja R . Az AR egyenes és az ω kör második metszéspontja P . A PCE és a PBF háromszögek körülírt köreinek második metszéspontja Q .

Bizonyítsuk be, hogy a DI és PQ egyenesek az AI -ra A -ban állított merőleges egyenesen metszik egymást.

Haiman Milán megoldása. Legyen S az A csúcshoz tartozó külső szögfelező metszéspontja ID -vel. Megmutatjuk, hogy PS , (PCE) és (PBF) áthaladnak egy P -től különböző ponton. E pont lesz majd Q , ahonnan következik, hogy P , Q és S az állításnak megfelelően valóban kollineárisak.

A PS egyenes és a (PCE) , (PBF) körök P -től különböző közös pontjának megmutatásához alkalmazzunk a beírt körre vonatkozó inverziót. Így a D , E , F , R , P pontok helyben maradnak. Az A , B , C , S pontok inverz képét jelölje rendre A' , B' , C' , S' . Innen már elég megmutatni, hogy $(PS'I)$, $(PC'E)$ és $(PB'F)$ egy P -től különböző pontban találkoznak. Ez azzal ekvivalens, hogy a három kör koaxiális, ami pedig ekvivalens azzal, hogy a középpontjaik kollineárisak.

A három középpont kollineáris elhelyezkedését komplex számok segítségével bizonyítjuk, ahol a beírt kört tekintjük egységkörnek. Legyenek a , d , e , f , p , r , b , c , s az A , D , E , F , P , R , B' , C' , S' pontoknak megfelelő komplex számok. Az érintők metszéspontjára vonatkozó összefüggés miatt

$$a = \frac{2ef}{e+f}.$$

Ebből $\bar{a} = \frac{2}{e+f}$. Mivel $DR \perp EF$, $dr + ef = 0$. Így $r = -\frac{ef}{d}$. Ekkor mivel A rajta van a PR húr egyenesén, $a + pr\bar{a} = p + r$. Ebből p értékére a

$$p = \frac{r-a}{r\bar{a}-1} = \frac{-\frac{ef}{d} - \frac{2ef}{e+f}}{-\frac{ef}{d} \cdot \frac{2}{e+f} - 1} = \frac{ef(2d+e+f)}{2ef+de+df}$$

kifejezés adódik.

Következő lépésként számítsuk ki a $(PB'F)$ kör középpontját. Legyen a középpont j_B . A körülírt körre vonatkozó összefüggés alapján

$$j_B = \frac{\begin{vmatrix} p & p\bar{p} & 1 \\ f & f\bar{f} & 1 \\ b & b\bar{b} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ f & \bar{f} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix}}.$$

Először a számlálóban álló determinánst számítjuk ki. Tudjuk, hogy $p\bar{p} = f\bar{f} = 1$, mivel P és F rajta vannak az egységkörön. Másrészt $b = \frac{d+f}{2}$, mivel B' a DF szakasz felezőpontja. Ezért $\bar{b} = \frac{d+f}{2df}$. A j_B számlálója így

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ f & 1 & 1 \\ \frac{d+f}{2} & \frac{(d+f)^2}{4df} & 1 \end{vmatrix} = p + \frac{(d+f)^2 f}{4df} + \frac{d+f}{2} - f - \frac{(d+f)^2 p}{4df} - \frac{d+f}{2} =$$

$$= (p-f) \left(1 - \frac{(d+f)^2}{4df} \right).$$

A j_B nevezője pedig

$$\begin{vmatrix} p & \frac{1}{p} & 1 \\ f & \frac{1}{f} & 1 \\ \frac{d+f}{2} & \frac{d+f}{2df} & 1 \end{vmatrix} = \frac{p}{f} + \frac{(d+f)f}{2df} + \frac{d+f}{2p} - \frac{(d+f)p}{2df} - \frac{f}{p} - \frac{d+f}{2f} =$$

$$= (f-p) \left(\frac{d+f}{2df} + \frac{d+f}{2pf} - \frac{p+f}{pf} \right).$$

Így j_B értéke

$$\frac{\frac{(d+f)^2}{4df} - 1}{\frac{d+f}{2df} + \frac{d+f}{2pf} - \frac{p+f}{pf}} = \frac{p(d-f)^2}{2(pd+pf+d^2+df-2dp-2df)} =$$

$$= \frac{p(d-f)^2}{2(d-f)(d-p)} = \frac{p(d-f)}{2(d-p)}.$$

Ugyanígy a $(PC'E)$ kör j_C középpontja $\frac{p(d-e)}{2(d-p)}$. Ezután számítsuk ki a $(PS'I)$ kör középpontját. Vegyük észre, hogy s a beírt kör D pontjából húzott átmérőre A' -ből állított merőleges talppontja. Ezért

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \left(\frac{e+f}{2} + d + (-d) - d(-d) \overline{\left(\frac{e+f}{2} \right)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e+f}{2} + d^2 \frac{e+f}{2ef} \right) = \\ &= \frac{(e+f)(ef+d^2)}{4ef}. \end{aligned}$$

Vegyük észre továbbá, hogy

$$\bar{s} = \frac{e+f}{4} \left(\frac{1}{ef} + \frac{1}{d^2} \right) = \frac{s}{d^2}.$$

A körülírt körre vonatkozó formulát $(PS'I)$ -re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\begin{vmatrix} p & p\bar{p} & 1 \\ s & s\bar{s} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \bar{p} & 1 \\ s & \bar{s} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{ps\bar{s} - p\bar{p}s}{p\bar{s} - \bar{p}s} = \frac{p\frac{s^2}{d^2} - s}{p\frac{s}{d^2} - \frac{s}{p}} = \frac{p(ps - d^2)}{p^2 - d^2}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $\frac{p(d-e)}{2(d-p)}$, $\frac{p(d-f)}{2(d-p)}$ és $\frac{p(ps-d^2)}{p^2-d^2}$ kollineárisak. Alkalmazzunk $\frac{p}{2(d-p)}$ arányú nagyítást, akkor ekvivalens módon azt kell belátnunk, hogy $d-e$, $d-f$ és $\frac{2(ps-d^2)}{p+d}$ kollineárisak. Kiszámítva

$$ps = \frac{ef(2d+e+f)}{2ef+de+df} \cdot \frac{e+f}{4} \cdot \frac{d^2+ef}{ef} = \frac{(2d+e+f)(e+f)(d^2+ef)}{4(2ef+de+df)}$$

értékét,

$$\begin{aligned} 2(d^2 - ps) &= 2 \cdot \frac{4(2ef+de+df)d^2 - (2d+e+f)(e+f)(d^2+ef)}{4(2ef+de+df)} = \\ &= \frac{4d^3(e+f) + 8d^2ef - 2d^3(e+f) - d^2(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} + \\ &\quad + \frac{-2def(e+f) - ef(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} = \\ &= \frac{2d^3(e+f) + d^2(-e^2 + 6ef - f^2) - 2def(e+f) - ef(e+f)^2}{2(2ef+de+df)} = \\ &= \frac{(2d-e-f)(d^2(e+f) + 4def + ef(e+f))}{2(2ef+de+df)}. \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy

$$p+d = \frac{2def + e^2f + ef^2 + 2def + d^2e + d^2f}{2ef+de+df} = \frac{d^2(e+f) + 4def + ef(e+f)}{2(2ef+de+df)},$$

adódik, hogy

$$\frac{2(d^2 - ps)}{p+d} = \frac{2d-e-f}{2} = \frac{1}{2}((d-e) + (d-f)).$$

Vagyis $(PS'I)$ középpontja a $(PB'F)$ és $(PC'E)$ középpontjai által meghatározott szakasz felezőpontja. A három középpont tehát kollineáris, az állítást beláttuk. $\square$